Programme de khôlle N°22 - Mathématiques - PC2

Semaine du 26/03/2018 au 30/03/2018 (dernière semaine de khôlle)

Equations différentielles

- Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1. : généralités, résolution de l'équation homogène, méthode de variation de la constante, raccordement de solutions.
- Systèmes différentiels linéaires d'ordre 1.
- Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 : généralités, dimension de l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène.

Fonctions à plusieurs variables

Le cours a été fait dans le cadre des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, mais les élèves doivent pouvoir le transposer pour les fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$.

- Dérivées partielles, fonctions de classe C^1, différentielle d'une fonction, gradient.
- Dérivée de $t \mapsto f\left(u(t), v(t)\right)$ et dérivées partielles de $(x,y) \mapsto f\left(u(x,y), v(x,y)\right)$.
- Dérivées partielles d'ordre 2, fonctions de classe C^2, théorème de Schwarz.
- Extrema (locaux et globaux) d'une fonction à deux variables. Existence d'extrema globaux sur un fermé borné de $\mathbb{R}^2$; condition nécessaire d'existence d'un extremum local. Notion de point critique.

Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 10 points suivants, traités en cours ou en exercices.

1. Expliquer pourquoi une équation différentielle d'ordre 2, notée $y^{''} + a(x)y^{'} + b(x)y = c(x)$ est équivalente à un système différentiel d'ordre 1 de la forme $X^{'} = A(t)X + B(t)$ avec $A(t) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $B(t) \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
2. Rappeler, sans démonstration, la méthode de résolution et les différents cas de figure rencontrés pour une équation différentielle $y^{''} + ay^{'} + by = 0$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
3. Expliquer sous quelle forme on peut chercher une solution particulière de l'équation différentielle $y^{''} + ay^{'} + by = P(t)e^{rt}$ où $P \in \mathbb{K}[X]$.
4. Trigonaliser une matrice 2×2 donnée sans indication.
5. Donner plusieurs DSE classiques choisis par l'examinateur.
6. Donner un exemple d'une fonction f à deux variables ayant des dérivées partielles en un point (a,b) alors que f n'est pas continue en (a,b).
7. Soient $f : (x,y) \mapsto e^{2x+3y} + 4x^2y$, $\varphi_1 : t \mapsto t^3$ et $\varphi_2 : t \mapsto \cos(t)$. Calculer de deux manières la dérivée de la fonction $g : t \mapsto f\left(\varphi_1(t), \varphi_2(t)\right)$ (calcul direct en trouvant l'expression de g et calcul en utilisant les règles de dérivation des fonctions composées).
8. Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et $g : (r,\theta) \mapsto f\left(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\right)$. Calculer les dérivées partielles de g.
9. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - f(x,y) = x$.
10. Donner un exemple d'une fonction f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, dont le gradient s'annule en un point (a,b), et qui ne possède pas d'extremum local en (a,b).