

# Programme de khôlle N°22 - Mathématiques - PC2

Semaine du 21/03/2022 au 25/03/2022 (dernière semaine de khôlle)

---

## Equations différentielles

- Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 : généralités, résolution de l'équation homogène, méthode de variation de la constante, raccordement de solutions.
- Systèmes différentiels linéaires d'ordre 1.
- Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 : généralités, dimension de l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène.

## Fonctions à plusieurs variables

Le cours a été fait dans le cadre des fonctions de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ , mais les élèves doivent pouvoir le transposer pour les fonctions de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}$ .

- Dérivées partielles, fonctions de classe  $C^1$ , différentielle d'une fonction, gradient.
- Dérivée de  $t \mapsto f(u(t), v(t))$  et dérivées partielles de  $(x, y) \mapsto f(u(x, y), v(x, y))$ .
- Dérivées partielles d'ordre 2, fonctions de classe  $C^2$ , théorème de Schwarz.
- Extrema (locaux et globaux) d'une fonction à deux variables. Existence d'extrema globaux sur un fermé borné de  $\mathbb{R}^2$ ; condition nécessaire d'existence d'un extremum local. Notion de point critique.



**Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 10 points suivants, traités en cours ou en exercices.**

1. Démontrer qu'un problème de Cauchy 
$$\begin{cases} a(x)y' + b(x)y = c(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$
 admet une unique solution sur tout intervalle  $I$  sur lequel  $a$  ne s'annule pas.
2. Réciter les 8 formules trigonométriques donnant une autre expression de  $\cos(a+b)$ ,  $\cos(a-b)$ ,  $\sin(a+b)$ ,  $\sin(a-b)$ ,  $\cos(p) + \cos(q)$ ,  $\cos(p) - \cos(q)$ ,  $\sin(p) + \sin(q)$  et  $\sin(p) - \sin(q)$ .
3. Rappeler, sans démonstration, la méthode de résolution et les différents cas de figure rencontrés pour une équation différentielle  $ay'' + by' + cy = 0$  avec  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$ .
4. Expliquer sous quelle forme on peut chercher une solution particulière de l'équation différentielle  $y'' + ay' + by = P(t)e^{rt}$  où  $P \in \mathbb{K}[X]$ .
5. Trigonaliser une matrice  $2 \times 2$  donnée sans indication.
6. Donner plusieurs DSE classiques choisis par l'examinateur.
7. Soient  $f : (x, y) \mapsto e^{2x+3y} + 4x^2y$ ,  $\varphi_1 : t \mapsto t^3$  et  $\varphi_2 : t \mapsto \cos(t)$ . Calculer de deux manières la dérivée de la fonction  $g : t \mapsto f(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$  (calcul direct en trouvant l'expression de  $g$  et calcul en utilisant les règles de dérivation des fonctions composées).
8. Soient  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  et  $g : (r, \theta) \mapsto f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ . Calculer les dérivées partielles de  $g$ .
9. Trouver toutes les fonctions  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  vérifiant :  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - f(x, y) = x$ .
10. Donner un exemple d'une fonction  $f$  de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , dont le gradient s'annule en un point  $(a, b)$ , et qui ne possède pas d'extremum local en  $(a, b)$ .