Programme de khôlle N°21 - Mathématiques - PC2

Semaine du 14/03/2022 au 18/03/2022

Dérivation des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

- Dérivabilité d'une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un $\mathbb{R}^n$; caractérisation à l'aide des fonctions composantes ; DL d'ordre 1.
- Composée d'une application linéaire et d'une application dérivable.
- Composée d'une application bilinéaire et d'applications dérivables.
- Fonctions de classe C^k.
- Le cas particulier des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$: théorème de Rolle, théorème des accroissements finis, inégalité des accroissements finis, théorème de limite de la dérivée, formule de Leibniz pour le calcul de $(fg)^{(n)}$.

Equations différentielles (en entier !)

- Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1. : généralités, résolution de l'équation homogène, méthode de variation de la constante, raccordement de solutions.
- Systèmes différentiels linéaires d'ordre 1.
- Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 : généralités, dimension de l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène.

Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 10 points suivants, traités en cours ou en exercices.

1. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable. Démontrer que $\overline{f}$ est dérivable sur I et que $\left(\overline{f}\right)' = \overline{f'}$.
2. Donner une expression simple de la dérivée n-ième de $x \mapsto \cos(x)$ et de $x \mapsto \sin(x)$.
3. Démontrer que $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in I$ si et seulement si f admet un DL_1 en a.
4. Soit $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une fonction dérivable. Dérivabilité et dérivée de $t \mapsto \mathrm{Tr}\,(A(t))$.
5. Expliquer, dans le cas général, la méthode de variation de la constante pour déterminer une solution particulière d'une équation différentielle $a(x)y' + b(x)y(x) = c(x)$ sur un intervalle I où a ne s'annule pas.
6. Démontrer qu'un problème de Cauchy $\begin{cases} a(x)y' + b(x)y = c(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ admet une unique solution sur tout intervalle I sur lequel a ne s'annule pas.
7. Réciter les 8 formules trigonométriques donnant une autre expression de $\cos(a+b)$, $\cos(a-b)$, $\sin(a+b)$, $\sin(a-b)$, $\cos(p)+\cos(q)$, $\cos(p)-\cos(q)$, $\sin(p)+\sin(q)$ et $\sin(p)-\sin(q)$.
8. Rappeler, sans démonstration, la méthode de résolution et les différents cas de figure rencontrés pour une équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$.
9. Expliquer sous quelle forme on peut chercher une solution particulière de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = P(t)e^{rt}$ où $P \in \mathbb{K}[X]$.
10. Trigonaliser une matrice 2×2 donnée sans indication.

Et la semaine suivante ?

Fonctions à plusieurs variables