Programme de khôlle N°20 - Mathématiques - PC2

Semaine du 10/03/2025 au 14/03/2025

Intégrales à paramètres (en entier !)

- Théorème de convergence dominée pour une suite de fonctions.
- Intégration terme à terme sur un intervalle quelconque.
- Continuité des intégrales à paramètres
- Théorème de convergence dominée à paramètre continu (pour trouver la limite d'une fonction définie par une intégrale à paramètre en une borne de son intervalle de définition)
- Dérivabilité des intégrales à paramètres

Dérivation des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

- Dérivabilité d'une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un $\mathbb{R}^n$; caractérisation à l'aide des fonctions composantes ; DL d'ordre 1.
- Composée d'une application linéaire et d'une application dérivable.
- Composée d'une application bilinéaire et d'applications dérivables.
- Fonctions de classe C^k.
- Le cas particulier des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$: théorème de Rolle, théorème des accroissements finis, inégalité des accroissements finis, théorème de limite de la dérivée, formule de Leibniz pour le calcul de $(fg)^{(n)}$.
- Convexité des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 10 points suivants, traités en cours ou en exercices.

1. Soit $A \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $S \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A = S^2$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. Démontrer que sa transformée de Fourier $\hat{f} : x \longmapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{itx}dt$ est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer la continuité de la fonction Γ sur $]0, +\infty[$.
4. Expliquer comment on peut trouver un équivalent de Γ en 0^+ à partir de l'égalité $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
5. Donner la définition d'une fonction convexe, deux propriétés géométriques de ces fonctions, ainsi qu'une caractérisation pour les fonctions deux fois dérivables.
6. Proposer une expression simple de la dérivée n-ème de cos et sin.
7. Démontrer que si f est dérivable en a, alors, f est continue en a. Contre-exemple pour la réciproque.
8. Donner une expression simple de la dérivée n-ième sur $]0, +\infty[$ de $x \mapsto \ln(x)$.
9. Enoncer le théorème de Rolle, le TAF et l'IAF.
10. A l'aide d'arguments de convexité, encadrer la fonction $x \mapsto \sin(x)$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ entre deux fonctions de la forme $x \mapsto kx$.

Et après les vacances ?

Equations différentielles