Programme de khôlle N°20 - Mathématiques - PC2

Semaine du 07/03/2022 au 11/03/2022

Intégrales à paramètres

Il s'agit du programme précédent !

Dérivation des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

- Dérivabilité d'une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un $\mathbb{R}^n$; caractérisation à l'aide des fonctions composantes ; DL d'ordre 1.
- Composée d'une application linéaire et d'une application dérivable.
- Composée d'une application bilinéaire et d'applications dérivables.
- Fonctions de classe C^k.
- Le cas particulier des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$: théorème de Rolle, théorème des accroissements finis, inégalité des accroissements finis, théorème de limite de la dérivée, formule de Leibniz pour le calcul de $(fg)^{(n)}$.

Equations différentielles (début)

- Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1. : généralités, résolution de l'équation homogène, méthode de variation de la constante, raccordement de solutions.

Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 10 points suivants, traités en cours ou en exercices.

1. Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E. Démontrer l'équivalence :
$$\big(\forall x \in E\,,\ \langle u(x), x\rangle \geq 0\big) \iff \text{les valeurs propres de } u \text{ sont positives}$$
2. Soit f un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E. Démontrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.
3. Donner un exemple de suite de fonctions (f_n) qui converge simplement vers une fonction f sur un intervalle I et où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_I f_n \neq \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n$.
4. Si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, sa transformée de Fourier $\hat{f} : x \longmapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{itx}dt$ est continue sur $\mathbb{R}$.
5. Démontrer la continuité de la fonction Γ sur $]0, +\infty[$.
6. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable. Démontrer que $\overline{f}$ est dérivable sur I et que $\left(\overline{f}\right)' = \overline{f'}$.
7. Donner une expression simple de la dérivée n-ième de $x \mapsto \cos(x)$ et de $x \mapsto \sin(x)$.
8. Démontrer que $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in I$ si et seulement si f admet un DL_1 en a.
9. Soit $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une fonction dérivable. Dérivabilité et dérivée de $t \mapsto \mathrm{Tr}\,(A(t))$.
10. Expliquer, dans le cas général, la méthode de variation de la constante pour déterminer une solution particulière d'une équation différentielle $a(x)y' + b(x)y(x) = c(x)$ sur un intervalle I où a ne s'annule pas.

Et la semaine suivante ?

Equations différentielles (en entier !)