Programme de khôlle N°19 - Mathématiques - PC2

Semaine du 17/02/2025 au 21/02/2025

Endomorphismes dans un espace euclidien (en entier !))

- Endomorphismes autoadjoints (on utilise désormais plutôt ce terme à la place de « symétrique ») : définition ; exemple des projections orthogonales ; matrice d'un endomorphisme autoadjoint dans une base orthonormale.
- Isométries vectorielles (là aussi, on utilise plutôt ce terme à la place de « automorphismes orthogonaux ») : définition ; image d'une base orthonormale par une isométrie ; ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries.
- Matrices orthogonales : définition ; ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$; caractérisation des matrices orthogonales ; lien avec les isométries vectorielles ; déterminant d'une isométrie vectorielle ; groupe spécial orthogonal $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.
- Orientation d'un espace euclidien.
- Réduction des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques réelles.
- Endomorphismes autoadjoints positifs et définis positifs ; notations $\mathcal{S}^+(E)$ et $\mathcal{S}^{++}(E)$; caractérisation spectrale. Matrices symétriques positives et définies positives ; notations $S_n^+(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$; caractérisation spectrale.
- Description de $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ et de $O_2(\mathbb{R})$.

Intégrales à paramètres (en entier !)

- Théorème de convergence dominée pour une suite de fonctions.
- Intégration terme à terme sur un intervalle quelconque.
- Continuité des intégrales à paramètres
- Théorème de convergence dominée à paramètre continu (pour trouver la limite d'une fonction définie par une intégrale à paramètre en une borne de son intervalle de définition)
- Dérivabilité des intégrales à paramètres

Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 10 points suivants, traités en cours ou en exercices.

1. Soit u un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E. Prouver que $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$ si et seulement si $\forall x \in E\,,\ \langle u(x), x\rangle \geq 0$.
2. Quels sont les deux types de matrices de $O_2(\mathbb{R})$? A quel type d'endomorphismes correspondent-ils ?
3. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}^2 = n$.
4. Enoncer et démontrer les relations coefficients-racines pour un polynôme de degré 2 et de degré 3.
5. Soit $M \in \mathrm{S}_2(\mathbb{R})$. Démontrer que : $M \in \mathrm{S}_2^{++}(\mathbb{R}) \iff \Big(\det(M) > 0 \text{ et } \mathrm{Tr}(M) > 0\Big)$.
6. Soit $A \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $S \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A = S^2$.
7. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. Démontrer que sa transformée de Fourier $\hat{f} : x \longmapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{itx}dt$ est continue sur $\mathbb{R}$.
8. Démontrer la continuité de la fonction Γ sur $]0, +\infty[$.
9. Expliquer comment on peut trouver un équivalent de Γ en 0^+ à partir de l'égalité $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
10. Donner la définition d'une fonction convexe, deux propriétés géométriques de ces fonctions, ainsi qu'une caractérisation pour les fonctions deux fois dérivables.

Et après les vacances ?

Dérivabilité