Programme de khôlle N°19 - Mathématiques - PC2

Semaine du 05/03/2018 au 09/03/2018

Intégrales à paramètres

- Théorème de convergence dominée pour une suite de fonctions
- Intégration terme à terme sur un intervalle quelconque
- Continuité des intégrales à paramètres
- Dérivabilité des intégrales à paramètres

Dérivation des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ (début)

- Le cas particulier des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$: théorème de Rolle, théorème des accroissements finis, inégalité des accroissements finis, théorème de limite de la dérivée, formule de Leibniz pour le calcul de $(fg)^{(n)}$.

Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 10 points suivants, traités en cours ou en exercices.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Prouver que la matrice $B = {}^tAA$ est symétrique et que $\mathrm{Sp}(B) \subset \mathbb{R}_+$.
2. Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E. Démontrer l'équivalence :
$$\big(\forall x \in E\,,\ \langle u(x), x\rangle \geq 0\big) \iff \text{les valeurs propres de } u \text{ sont positives}$$
3. Donner un exemple de suite de fonctions (f_n) qui converge simplement vers une fonction f sur un intervalle I et où $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_I f_n \neq \int_I \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$.
4. Si $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ est une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, sa transformée de Fourier $\hat{f} : x \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{itx}dt$ est continue sur $\mathbb{R}$.
5. Démontrer la continuité de la fonction Γ sur $]0, +\infty[$.
6. Déterminer l'équation fonctionnelle de Γ et en déduire un équivalent de Γ en 0^+.
7. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable. Démontrer que $\overline{f}$ est dérivable sur I et que $\left(\overline{f}\right)' = \overline{f'}$.
8. Donner une expression simple de la dérivée n-ième de $x \mapsto \cos(x)$ et de $x \mapsto \sin(x)$.
9. Démontrer que $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in I$ si et seulement si f admet un DL_1 en a.
10. Démontrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Et la semaine suivante ?

Dérivabilité (en entier)