

Programme de khôlle N°19 - Mathématiques - PC2

Semaine du 28/02/2022 au 04/03/2022

Endomorphismes dans un espace euclidien

- Endomorphismes symétriques : définition ; exemple des projections orthogonales ; matrice d'un endomorphisme symétrique dans une base orthonormale.
- Automorphismes orthogonaux : définition ; image d'une base orthonormale par un endomorphisme orthogonal ; ensemble $\mathcal{O}(E)$ des automorphismes orthogonaux ; exemple des réflexions en dimension 2 et 3.
- Matrices orthogonales : définition ; ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$; caractérisation des matrices orthogonales ; lien avec les automorphismes orthogonaux ; déterminant d'un automorphisme orthogonal ; groupe spécial orthogonal $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.
- Réduction des endomorphismes symétriques et des matrices symétriques réelles.
- Etude de $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$.

Intégrales à paramètres

- Théorème de convergence dominée pour une suite de fonctions
- Intégration terme à terme sur un intervalle quelconque
- Continuité des intégrales à paramètres
- Dérivabilité des intégrales à paramètres



Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 10 points suivants, traités en cours ou en exercices.

1. Que dire du déterminant et des éventuelles valeurs propres réelles d'un automorphisme orthogonal ?
2. Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien. Alors, u conserve le produit scalaire si et seulement s'il conserve la norme.
3. L'ensemble $(\mathcal{O}(E), \circ)$ est stable par composition et contient les inverses de ses éléments.
4. Si a et b sont deux réels tels que $a^2 + b^2 = 1$, alors, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$.
5. Énoncer et démontrer les formules permettant d'exprimer le cosinus et le sinus de l'angle d'une rotation plane à l'aide d'un vecteur unitaire.
6. Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E . Démontrer l'équivalence :

$$(\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle \geq 0) \iff \text{les valeurs propres de } u \text{ sont positives}$$

7. Soit f un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E . Démontrer que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E .
8. Donner un exemple de suite de fonctions (f_n) qui converge simplement vers une fonction f sur un intervalle I et où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n \neq \int_I \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$.
9. Si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est intégrable sur \mathbb{R} , sa transformée de Fourier $\hat{f} : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{itx} dt$ est continue sur \mathbb{R} .
10. Démontrer la continuité de la fonction Γ sur $]0, +\infty[$.



Et la semaine suivante ?

Dérivabilité