Programme de khôlle N°19 - Mathématiques - PC2

Semaine du 04/03/2019 au 08/03/2019

Intégrales à paramètres

- Théorème de convergence dominée pour une suite de fonctions
- Intégration terme à terme sur un intervalle quelconque
- Continuité des intégrales à paramètres
- Dérivabilité des intégrales à paramètres

Dérivation des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

- Dérivabilité d'une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un $\mathbb{R}^n$; caractérisation à l'aide des fonctions composantes ; DL d'ordre 1.
- Composée d'une application linéaire et d'une application dérivable.
- Composée d'une application bilinéaire et d'applications dérivables.
- Fonctions de classe C^k.
- Le cas particulier des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$: théorème de Rolle, théorème des accroissements finis, inégalité des accroissements finis, théorème de limite de la dérivée, formule de Leibniz pour le calcul de $(fg)^{(n)}$.

Attention, la notion de C^1-difféomorphisme n'est plus au programme !

Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 10 points suivants, traités en cours ou en exercices.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Prouver que la matrice $B = {}^tAA$ est symétrique et que $\mathrm{Sp}(B) \subset \mathbb{R}_+$.
2. Si $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ est une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, sa transformée de Fourier $\hat{f} : x \longmapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{itx}dt$ est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer la continuité de la fonction Γ sur $]0, +\infty[$.
4. Déterminer l'équation fonctionnelle de Γ et en déduire un équivalent de Γ en 0^+.
5. Conditions nécessaires et suffisantes sur $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ pour que $M = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{bmatrix}$ soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
6. Domaine de définition de la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^x(1+t)}dt$.
7. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable. Démontrer que $\overline{f}$ est dérivable sur I et que $\left(\overline{f}\right)' = \overline{f'}$.
8. Donner une expression simple de la dérivée n-ième de $x \mapsto \cos(x)$ et de $x \mapsto \sin(x)$.
9. Démontrer que si f est dérivable en a, alors, f est continue en a. Contre-exemple pour la réciproque.
10. Donner, sans aucune hésitation, le domaine de définition, les variations, la dérivée et la courbe d'une des fonctions suivantes : ch, sh, th, Arctan, Arccos, Arcsin.

Et la semaine suivante ?

Equations différentielles