Programme de khôlle N°18 - Mathématiques - PC2

Semaine du 26/02/2018 au 02/03/2018

Endomorphismes dans un espace euclidien

- Endomorphismes symétriques : définition ; exemple des projections orthogonales ; matrice d'un endomorphisme symétrique dans une base orthonormale.
- Automorphismes orthogonaux : définition ; image d'une base orthonormale par un endomorphisme orthogonal ; ensemble $\mathcal{O}(E)$ des automorphismes orthogonaux ; exemple des réflexions en dimension 2 et 3.
- Matrices orthogonales : définition ; ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$; caractérisation des matrices orthogonales ; lien avec les automorphismes orthogonaux ; déterminant d'un automorphisme orthogonal ; groupe spécial orthogonal $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.
- Réduction des endomorphismes symétriques et des matrices symétriques réelles.
- Etude de $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$.

Intégrales à paramètres (début)

- Théorème de convergence dominée pour une suite de fonctions
- Intégration terme à terme sur un intervalle quelconque
- Continuité des intégrales à paramètres

Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 10 points suivants, traités en cours ou en exercices.

1. Que dire du déterminant et des éventuelles valeurs propres réelles d'un automorphisme orthogonal ?
2. Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien. Alors, u conserve le produit scalaire si et seulement s'il conserve la norme.
3. L'ensemble $\big(\mathcal{O}(E), \circ\big)$ est stable par composition et contient les inverses de ses élements.
4. Si a et b sont deux réels tels que $a^2 + b^2 = 1$, alors, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$.
5. Enoncer et démontrer les formules permettant d'exprimer le cosinus et le sinus de l'angle d'une rotation plane à l'aide d'un vecteur unitaire.
6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Prouver que la matrice $B = {}^tAA$ est symétrique et que $\mathrm{Sp}(B) \subset \mathbb{R}_+$.
7. Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E. Démontrer l'équivalence :
$$\big(\forall x \in E\,,\ \langle u(x), x\rangle \geq 0\big) \iff \text{les valeurs propres de } u \text{ sont positives}$$
8. Donner un exemple de suite de fonctions (f_n) qui converge simplement vers une fonction f sur un intervalle I et où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n \neq \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n$.
9. Si $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ est une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, sa transformée de Fourier $\hat{f} : x \longmapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{itx}dt$ est continue sur $\mathbb{R}$.
10. Démontrer la continuité de la fonction Γ sur $]0, +\infty[$.

Et la semaine suivante ?

Intégrales à paramètres (en entier)