# Programme de khôlle N°18 - Mathématiques - PC2

## Semaine du 11/02/2019 au 15/02/2019

---

### Endomorphismes dans un espace euclidien

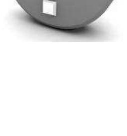
- Endomorphismes symétriques : définition ; exemple des projections orthogonales ; matrice d'un endomorphisme symétrique dans une base orthonormale.
- Automorphismes orthogonaux : définition ; image d'une base orthonormale par un endomorphisme orthogonal ; ensemble $\mathcal{O}(E)$ des automorphismes orthogonaux ; exemple des réflexions en dimension 2 et 3.
- Matrices orthogonales : définition ; ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ ; caractérisation des matrices orthogonales ; lien avec les automorphismes orthogonaux ; déterminant d'un automorphisme orthogonal ; groupe spécial orthogonal $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.
- Réduction des endomorphismes symétriques et des matrices symétriques réelles.
- Etude de $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$.

### Intégrales à paramètres

- Théorème de convergence dominée pour une suite de fonctions
- Intégration terme à terme sur un intervalle quelconque
- Continuité des intégrales à paramètres
- Dérivabilité des intégrales à paramètres

**Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 10 points suivants, traités en cours ou en exercices.**

1. Soit $u$ un endomorphisme d'un espace euclidien. Alors, $u$ conserve le produit scalaire si et seulement s'il conserve la norme.
2. L'ensemble $\mathcal{O}(E)$ est stable par composition et contient les inverses de ses élements.
3. Si $a$ et $b$ sont deux réels tels que $a^2 + b^2 = 1$, alors, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$.
4. Enoncer et démontrer les formules permettant d'exprimer le cosinus et le sinus de l'angle d'une rotation plane à l'aide d'un vecteur unitaire.
5. Enoncer et démontrer les relations coefficients-racines pour un polynôme de degré 2 et de degré 3.
6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Prouver que la matrice $B = {}^tAA$ est symétrique et que $\mathrm{Sp}(B) \subset \mathbb{R}_+$.
7. Si $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ est une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, sa transformée de Fourier $\hat{f} : x \longmapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{itx}dt$ est continue sur $\mathbb{R}$.
8. Démontrer la continuité de la fonction $\Gamma$ sur $]0, +\infty[$.
9. Déterminer l'équation fonctionnelle de $\Gamma$ et en déduire un équivalent de $\Gamma$ en $0^+$.
10. Conditions nécessaires et suffisantes sur $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ pour que $M = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{bmatrix}$ soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.



## Et après les vacances ?

Dérivabilité