

Programme de khôlle N°18 - Mathématiques - PC2

Semaine du 07/02/2022 au 11/02/2022

Espaces préhilbertiens réels (Révisions)

- Espaces préhilbertiens : définition, exemples, inégalité de Cauchy-Schwarz, norme associée au produit scalaire.
- Orthogonalité : vecteurs orthogonaux, orthogonal d'une partie, familles orthogonales et orthonormales, Relation de Pythagore, supplémentaires orthogonaux, projecteurs orthogonaux.
- Calculs analytiques dans un espace préhilbertien : définition d'une base orthonormale, calculs dans une base orthonormale, expression de la projection orthogonale sur un sous-espace de dim finie, inégalité de Bessel
- Distance à un sous-espace vectoriel

Endomorphismes dans un espace euclidien

- Endomorphismes symétriques : définition ; exemple des projections orthogonales ; matrice d'un endomorphisme symétrique dans une base orthonormale.
- Automorphismes orthogonaux : définition ; image d'une base orthonormale par un endomorphisme orthogonal ; ensemble $\mathcal{O}(E)$ des automorphismes orthogonaux ; exemple des réflexions en dimension 2 et 3.
- Matrices orthogonales : définition ; ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$; caractérisation des matrices orthogonales ; lien avec les automorphismes orthogonaux ; déterminant d'un automorphisme orthogonal ; groupe spécial orthogonal $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.
- Réduction des endomorphismes symétriques et des matrices symétriques réelles.
- Etude de $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$.



Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 10 points suivants, traités en cours ou en exercices.

1. L'application $(A, B) \mapsto \text{Tr}({}^t A \times B)$ est un produit scalaire sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Si E est un espace préhilbertien et F et G deux sev de E , alors $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
3. Une famille orthogonale finie, dont aucun vecteur n'est nul, est libre.
4. Enoncer et démontrer l'inégalité de Bessel.
5. Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ pour $n \in \mathbb{N}$.
6. Que dire du déterminant et des éventuelles valeurs propres réelles d'un automorphisme orthogonal ?
7. Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien. Alors, u conserve le produit scalaire si et seulement s'il conserve la norme.
8. L'ensemble $(\mathcal{O}(E), \circ)$ est stable par composition et contient les inverses de ses éléments.
9. Si a et b sont deux réels tels que $a^2 + b^2 = 1$, alors, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$.
10. Enoncer et démontrer les formules permettant d'exprimer le cosinus et le sinus de l'angle d'une rotation plane à l'aide d'un vecteur unitaire.



Et après les vacances ?

Intégrales à paramètres