Programme de khôlle N°18 - Mathématiques - PC2

Semaine du 10/02/2025 au 14/02/2025

Endomorphismes dans un espace euclidien (en entier !))

- Endomorphismes autoadjoints (on utilise désormais plutôt ce terme à la place de « symétrique ») : définition ; exemple des projections orthogonales ; matrice d'un endomorphisme autoadjoint dans une base orthonormale.
- Isométries vectorielles (là aussi, on utilise plutôt ce terme à la place de « automorphismes orthogonaux ») : définition ; image d'une base orthonormale par une isométrie ; ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries.
- Matrices orthogonales : définition ; ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$; caractérisation des matrices orthogonales ; lien avec les isométries vectorielles ; déterminant d'une isométrie vectorielle ; groupe spécial orthogonal $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.
- Orientation d'un espace euclidien.
- Réduction des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques réelles.
- Endomorphismes autoadjoints positifs et définis positifs ; notations $\mathcal{S}^+(E)$ et $\mathcal{S}^{++}(E)$; caractérisation spectrale. Matrices symétriques positives et définies positives ; notations $S_n^+(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$; caractérisation spectrale.
- Description de $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ et de $O_2(\mathbb{R})$.

Intégrales à paramètres (début)

- Théorème de convergence dominée pour une suite de fonctions.
- Intégration terme à terme sur un intervalle quelconque.

Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 10 points suivants, traités en cours ou en exercices.

1. Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien. Alors, u conserve le produit scalaire si et seulement s'il conserve la norme.
2. L'ensemble $\mathcal{O}(E)$ est stable par composition et contient les inverses de ses élements.
3. Démontrer qu'une projection orthogonale est un endomorphisme autoadjoint.
4. Illustrer le théorème spectral (version matricielle) avec la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.
5. Que dire du déterminant d'une matrice orthogonale ou d'une isométrie ? Le démontrer.
6. Soit u un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E. Prouver que $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$ si et seulement si $\forall x \in E\,,\ \langle u(x), x\rangle \geq 0$.
7. Quels sont les deux types de matrices de $O_2(\mathbb{R})$? A quel type d'endomorphismes correspondent-ils ?
8. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}^2 = n$.
9. Enoncer et démontrer les relations coefficients-racines pour un polynôme de degré 2 et de degré 3.
10. Soit $M \in \mathrm{S}_2(\mathbb{R})$. Démontrer que : $M \in \mathrm{S}_2^{++}(\mathbb{R}) \iff \Big(\det(M) > 0 \text{ et } \mathrm{Tr}(M) > 0\Big)$.

Et la semaine suivante ?

Intégrales à paramètres (en entier !)