

# Programme de khôlle N°17 - Mathématiques - PC2

Semaine du 05/02/2018 au 09/02/2018

---

## Espaces préhilbertiens réels (Révisions)

- Espaces préhilbertiens : définition, exemples, inégalité de Cauchy-Schwarz, norme associée au produit scalaire.
- Orthogonalité : vecteurs orthogonaux, orthogonal d'une partie, familles orthogonales et orthonormales, Relation de Pythagore, supplémentaires orthogonaux, projecteurs orthogonaux.
- Calculs analytiques dans un espace préhilbertien : définition d'une base orthonormale, calculs dans une base orthonormale, expression de la projection orthogonale sur un sous-espace de dim finie, inégalité de Bessel
- Distance à un sous-espace vectoriel

## Endomorphismes dans un espace euclidien

- Endomorphismes symétriques : définition ; exemple des projections orthogonales ; matrice d'un endomorphisme symétrique dans une base orthonormale.
- Automorphismes orthogonaux : définition ; image d'une base orthonormale par un endomorphisme orthogonal ; ensemble  $\mathcal{O}(E)$  des automorphismes orthogonaux ; exemple des réflexions en dimension 2 et 3.
- Matrices orthogonales : définition ; ensemble  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  ; caractérisation des matrices orthogonales ; lien avec les automorphismes orthogonaux ; déterminant d'un automorphisme orthogonal ; groupe spécial orthogonal  $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ .
- Réduction des endomorphismes symétriques et des matrices symétriques réelles.
- Etude de  $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ .



**Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 10 points suivants, traités en cours ou en exercices.**

1. Si  $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  est un préhilbertien réel, alors, l'application  $x \mapsto \sqrt{\langle x | x \rangle}$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}_+$  est une norme sur  $E$ .
2. L'application  $(A, B) \mapsto \text{Tr}({}^t A \times B)$  est un produit scalaire sur  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
3. Démontrer que si  $n \geq 3$ , l'égalité  $\|\sum_{k=1}^n x_k\|^2 = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2$  n'implique pas nécessairement l'orthogonalité de la famille des  $x_k$ .
4. Si  $E$  est un espace euclidien et  $F$  et  $G$  deux sev de  $E$ , alors  $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ .
5. Une famille orthogonale finie, dont aucun vecteur n'est nul, est libre.
6. Que dire du déterminant et des éventuelles valeurs propres réelles d'un automorphisme orthogonal ?
7. Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace euclidien. Alors,  $u$  conserve le produit scalaire si et seulement s'il conserve la norme.
8. L'ensemble  $(\mathcal{O}(E), \circ)$  est stable par composition et contient les inverses de ses éléments.
9. Si  $a$  et  $b$  sont deux réels tels que  $a^2 + b^2 = 1$ , alors, il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $a = \cos(\theta)$  et  $b = \sin(\theta)$ .
10. Énoncer et démontrer les formules permettant d'exprimer le cosinus et le sinus de l'angle d'une rotation plane à l'aide d'un vecteur unitaire.



Et la semaine suivante ?

Intégrales à paramètres (début)