Programme de khôlle N°17 - Mathématiques - PC2

Semaine du 03/02/2025 au 07/02/2025

Espaces préhilbertiens réels (Révisions)

- Espaces préhilbertiens : définition, exemples, inégalité de Cauchy-Schwarz, norme associée au produit scalaire.
- Orthogonalité : vecteurs orthogonaux, orthogonal d'une partie, familles orthogonales et orthonormales, Relation de Pythagore, supplémentaires orthogonaux, projecteurs orthogonaux.
- Calculs analytiques dans un espace préhilbertien : définition d'une base orthonormale, calculs dans une base orthonormale, expression de la projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie, inégalité de Bessel
- Distance à un sous-espace vectoriel

Endomorphismes dans un espace euclidien (début !)

- Endomorphismes autoadjoints (on utilise désormais plutôt ce terme à la place de « symétrique ») : définition ; exemple des projections orthogonales ; matrice d'un endomorphisme autoadjoint dans une base orthonormale.
- Isométries vectorielles (là aussi, on utilise plutôt ce terme à la place de « automorphismes orthogonaux ») : définition ; image d'une base orthonormale par une isométrie ; ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries.
- Matrices orthogonales : définition ; ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$; caractérisation des matrices orthogonales ; lien avec les isométries vectorielles ; déterminant d'une isométrie vectorielle ; groupe spécial orthogonal $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.
- Orientation d'un espace euclidien.
- Réduction des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques réelles.
- Endomorphismes autoadjoints positifs et définis positifs ; notations $\mathcal{S}^+(E)$ et $\mathcal{S}^{++}(E)$; caractérisation spectrale. Matrices symétriques positives et définies positives ; notations $S_n^+(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$; caractérisation spectrale.

Attention : Pas encore d'exercices sur la description $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ et de $O_2(\mathbb{R})$!

Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 10 points suivants, traités en cours ou en exercices.

1. Une famille orthogonale finie, dont aucun vecteur n'est nul, est libre.
2. Démontrer que $E = \left\{ f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \,/\, f^2 \text{ est intégrable sur } I \right\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
3. Si E est un espace préhilbertien et F et G deux sev de E, alors $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$.
4. Enoncer l'inégalité de Bessel dans un espace euclidien et l'illustrer par un schéma.
5. Expliquer l'idée du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
6. Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien. Alors, u conserve le produit scalaire si et seulement s'il conserve la norme.
7. L'ensemble $\mathcal{O}(E)$ est stable par composition et contient les inverses de ses élements.
8. Démontrer qu'une projection orthogonale est un endomorphisme autoadjoint.
9. Illustrer le théorème spectral (version matricielle) avec la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.
10. Que dire du déterminant d'une matrice orthogonale ou d'une isométrie ? Le démontrer.

Et la semaine suivante ?

Intégrales à paramètres