

Programme de khôlle N°16 - Mathématiques - PC2

Semaine du 24/01/2022 au 28/01/2022

Variables aléatoires discrètes (en entier !)

- Définition, opérations sur les VARD, loi de probabilité, fonction de répartition.
- Couple de VARD : loi conjointe, lois marginales, lois conditionnées.
- Indépendance et mutuelle indépendance de VARD.
- Espérance (définition, linéarité, positivité, croissance), théorème de transfert ; Variance et écart-type ; covariance ; variance d'une somme de VARD ; coefficient de corrélation.
- Inégalité de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.
- Série génératrice d'une VARD telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$; utilisation pour le calcul de $E(X)$ et de $V(X)$.
- Lois usuelles (variables certaines, loi uniforme, loi de Bernoulli, loi Binomiale, loi géométrique, loi de Poisson).



Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 10 points suivants, traités en cours ou en exercices.

1. Déterminer le domaine de définition (en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$.
2. Soient X une VARD admettant une variance et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Prouver que $V(aX + b) = a^2V(X)$.
3. Énoncer et démontrer la formule de Koenig-Huygens.
4. Énoncer et démontrer le lien qui existe entre les lois marginales et la loi conjointe.
5. Démontrer, lorsque toutes ces quantités existent, le lien entre $V(X + Y)$, $V(X)$, $V(Y)$ et $\text{cov}(X, Y)$.
6. Donner l'expression et la démonstration du calcul de l'espérance, de la variance ou de la série génératrice d'une VARD suivant une loi usuelle au programme et choisie par l'examinateur.
7. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Exprimer la probabilité $P(X = Y)$.
8. Énoncer et démontrer le résultat sur la somme de lois de Poisson.
9. Énoncer et démontrer l'inégalité de Markov.
10. Démontrer que le coefficient de corrélation linéaire, lorsque cette quantité existe, appartient à $[-1, 1]$.



Et la semaine suivante ?

Espaces préhilbertiens