Programme de khôlle N°16 - Mathématiques - PC2

Semaine du 27/01/2025 au 31/01/2025

Variables aléatoires discrètes (en entier !)

- Définition, opérations sur les VARD, loi de probabilité, fonction de répartition.
- Espérance (définition, linéarité, positivité, croissance), théorème de transfert ; Variance et écart-type ; covariance ; variance d'une somme de VARD.
- Couple de VARD : loi conjointe, lois marginales, lois conditionnées.
- Indépendance et mutuelle indépendance de VARD.
- Inégalité de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.
- Série génératrice d'une VARD telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$; utilisation pour le calcul de $E(X)$ et de $V(X)$.
- Lois usuelles (variables certaines, loi uniforme, loi de Bernoulli, loi Binomiale, loi géométrique, loi de Poisson).

Espaces préhilbertiens réels (Révisions)

- Espaces préhilbertiens : définition, exemples, inégalité de Cauchy-Schwarz, norme associée au produit scalaire.
- Orthogonalité : vecteurs orthogonaux, orthogonal d'une partie, familles orthogonales et orthonormales, Relation de Pythagore, supplémentaires orthogonaux, projecteurs orthogonaux.
- Calculs analytiques dans un espace préhilbertien : définition d'une base orthonormale, calculs dans une base orthonormale, expression de la projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie, inégalité de Bessel
- Distance à un sous-espace vectoriel

Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 10 points suivants, traités en cours ou en exercices.

1. Donner l'expression et la démonstration du calcul de l'espérance, de la variance ou de la série génératrice d'une VARD suivant une loi usuelle au programme, et choisie par l'examinateur.
2. Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Calculer, si elle existe, $E\left(e^X\right)$.
3. Enoncer et démontrer la formule permettant d'obtenir $V(X+Y)$.
4. Soient X et Y deux variables indépendantes suivant chacune la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Calculer $\mathrm{P}(X = Y)$.
5. Soit $x \in]-1, 1[$. Donner l'expression des sommes $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$ et $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}$,
6. Une famille orthogonale finie, dont aucun vecteur n'est nul, est libre.
7. Démontrer que $E = \left\{f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \,/\, f^2 \text{ est intégrable sur } I\right\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
8. Si E est un espace préhilbertien et F et G deux sev de E, alors $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$.
9. Enoncer l'inégalité de Bessel dans un espace euclidien et l'illustrer par un schéma.
10. Expliquer l'idée du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Et la semaine suivante ?

Endomorphismes dans les euclidiens