Programme de khôlle N°16 - Mathématiques - PC2

Semaine du 29/01/2018 au 02/02/2018

Variables aléatoires discrètes (en entier !)

- Définition, opérations sur les VARD, loi de probabilité, fonction de répartition.
- Couple de VARD : loi conjointe, lois marginales, lois conditionnées.
- Indépendance et mutuelle indépendance de VARD.
- Espérance (définition, linéarité, positivité, croissance), théorème de transfert ; Variance et écart-type ; covariance ; variance d'une somme de VARD ; coefficient de corrélation.
- Inégalité de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.
- Série génératrice d'une VARD telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$; utilisation pour le calcul de $E(X)$ et de $V(X)$.
- Lois usuelles (variables certaines, loi uniforme, loi de Bernoulli, loi Binomiale, loi géométrique, loi de Poisson).
- Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson ; loi faible des grands nombres.

Espaces préhilbertiens réels (Révisions)

- Espaces préhilbertiens : définition, exemples, inégalité de Cauchy-Schwarz, norme associée au produit scalaire.
- Orthogonalité : vecteurs orthogonaux, orthogonal d'une partie, familles orthogonales et orthonormales, Relation de Pythagore, supplémentaires orthogonaux, projecteurs orthogonaux.
- Calculs analytiques dans un espace préhilbertien : définition d'une base orthonormale, calculs dans une base orthonormale, expression de la projection orthogonale sur un sous-espace de dim finie, inégalité de Bessel
- Distance à un sous-espace vectoriel

Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 10 points suivants, traités en cours ou en exercices.

1. Démontrer que, sous réserve d'existence, $V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - \left(G_X'(1)\right)^2$.
2. Donner l'expression et la démonstration du calcul de l'espérance, de la variance ou de la série génératrice d'une VARD suivant une loi usuelle au programme et choisie par l'examinateur.
3. Déterminer la loi du maximum de n variables aléatoires mutuellements indépendantes suivant toutes la même loi géométrique de paramètre p.
4. Enoncer et démontrer la formule reliant $V(X+Y)$ avec $V(X)$, $V(Y)$ et $\operatorname{cov}(X,Y)$ lorsque X et Y sont deux variables aléatoires discrètes telles que $V(X)$, $V(Y)$ et $\operatorname{cov}(X,Y)$ existent.
5. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Exprimer les probabilités $\mathrm{P}(X=Y)$ et $\mathrm{P}(X \leq Y)$ à l'aide de probabilités faisant intervenir X et Y.
6. Si $\big(E, \langle .|. \rangle\big)$ est un préhilbertien réel, alors, l'application $x \mapsto \sqrt{\langle x|x \rangle}$ de E dans $\mathbb{R}_+$ est une norme sur E.
7. L'application $(A,B) \longmapsto \operatorname{Tr}\left({}^tA \times B\right)$ est un produit scalaire sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
8. Démontrer que si $n \geq 3$, l'égalité $\Big\| \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \Big\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$ n'implique pas nécessairement l'orthogonalité de la famille des x_k.
9. Si E est un espace euclidien et F et G deux sev de E, alors $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
10. Une famille orthogonale finie, dont aucun vecteur n'est nul, est libre.

Et la semaine suivante ?

Endomorphismes dans un espace euclidien