

Programme de khôlle N°16 - Mathématiques - PC2

Semaine du 28/01/2019 au 01/02/2019

Variables aléatoires discrètes

Il s'agit du programme précédent !

Espaces préhilbertiens réels (Révisions)

- Espaces préhilbertiens : définition, exemples, inégalité de Cauchy-Schwarz, norme associée au produit scalaire.
- Orthogonalité : vecteurs orthogonaux, orthogonal d'une partie, familles orthogonales et orthonormales, Relation de Pythagore, supplémentaires orthogonaux, projecteurs orthogonaux.
- Calculs analytiques dans un espace préhilbertien : définition d'une base orthonormale, calculs dans une base orthonormale, expression de la projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie, inégalité de Bessel
- Distance à un sous-espace vectoriel



Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 10 points suivants, traités en cours ou en exercices.

1. Soient X et Y deux VARD admettant un coefficient de corrélation $\rho(X, Y)$. Prouver que $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$.
2. Donner l'expression et la démonstration du calcul de l'espérance, de la variance ou de la série génératrice d'une VARD suivant une loi usuelle au programme, et choisie par l'examineur.
3. Soient $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $r \in \mathbb{N}$. Calculer $E(X(X-1)\dots(X-r+1))$.
4. Enoncer et démontrer la formule permettant d'obtenir $V(X+Y)$.
5. Soient X et Y deux variables indépendantes suivant chacune la loi uniforme sur $[[1, n]]$. Calculer $P(X=Y)$.
6. Si $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est un préhilbertien réel, alors, l'application $x \mapsto \sqrt{\langle x | x \rangle}$ de E dans \mathbb{R}_+ est une norme sur E .
7. L'application $(A, B) \mapsto \text{Tr}({}^t A \times B)$ est un produit scalaire sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
8. Si E est un espace préhilbertien et F et G deux sev de E , alors $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$.
9. Une famille orthogonale finie, dont aucun vecteur n'est nul, est libre.
10. Prouver que $E = \left\{ (u_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \sum_{n \geq 0} u_n^2 \text{ converge} \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.



Et la semaine suivante ?

Endomorphismes dans un espace euclidien