

# Programme de khôlle N°15 - Mathématiques - PC2

Semaine du 17/01/2022 au 21/01/2022

---

## Séries entières (en entier !)

*Il s'agit du programme précédent.*

## Variables aléatoires discrètes (début)

- Définition, opérations sur les VARD, loi de probabilité, fonction de répartition.
- Couple de VARD : loi conjointe, lois marginales, lois conditionnées.
- Indépendance et mutuelle indépendance de VARD.
- Espérance (définition, linéarité, positivité, croissance), théorème de transfert ; Variance et écart-type ; covariance ; variance d'une somme de VARD ; coefficient de corrélation.

**Attention :** Pas encore de lois usuelles, ni de fonctions génératrices, ni d'inégalités de Markov ou B-T...



**Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 10 points suivants, traités en cours ou en exercices.**

1. Démontrer que si  $\sum a_n x^n$  est une série entière de somme  $S$ , alors,  $a_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .
2. Dédire les DSE de  $\cos$ ,  $\sin$ ,  $\operatorname{ch}$  et  $\operatorname{sh}$  de celui de  $\exp$ .
3. Donner le DSE de  $u \mapsto (1+u)^\alpha$ . En déduire celui de  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .
4. Donner 5 DSE que l'on peut déduire (en l'expliquant) de celui de  $\frac{1}{1-x}$  sur  $] -1, 1[$ .
5. Que peut-on dire du DSE d'une fonction paire ? Le démontrer.
6. Déterminer le domaine de définition (en fonction de  $\alpha \in \mathbb{R}$  de la fonction  $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$ .
7. Soient  $X$  une VARD admettant une variance et  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Prouver que  $V(aX + b) = a^2 V(X)$ .
8. Énoncer et démontrer la formule de Koenig-Huygens.
9. Énoncer et démontrer le lien qui existe entre les lois marginales et la loi conjointe.
10. Démontrer, lorsque toutes ces quantités existent, le lien entre  $V(X + Y)$ ,  $V(X)$ ,  $V(Y)$  et  $\operatorname{cov}(X, Y)$ .



Et la semaine suivante ?

Variables aléatoires (en entier)