Programme de khôlle N°15 - Mathématiques - PC2

Semaine du 22/01/2018 au 26/01/2018

Variables aléatoires discrètes (en entier !)

- Définition, opérations sur les VARD, loi de probabilité, fonction de répartition.
- Couple de VARD : loi conjointe, lois marginales, lois conditionnées.
- Indépendance et mutuelle indépendance de VARD.
- Espérance (définition, linéarité, positivité, croissance), théorème de transfert ; Variance et écart-type ; covariance ; variance d'une somme de VARD ; coefficient de corrélation.
- Inégalité de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.
- Série génératrice d'une VARD telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$; utilisation pour le calcul de $E(X)$ et de $V(X)$.
- Lois usuelles (variables certaines, loi uniforme, loi de Bernoulli, loi Binomiale, loi géométrique, loi de Poisson).
- Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson ; loi faible des grands nombres.

Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 10 points suivants, traités en cours ou en exercices.

1. Soient X une VARD admettant une variance et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Prouver que $V(aX + b) = a^2V(X)$.
2. Soient X et Y deux VARD admettant un coefficient de corrélation $\rho(X, Y)$. Prouver que $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$.
3. Rappeler la définition de $\binom{n}{k}$, puis énoncer et démontrer deux propriétés sur ces coefficients (symétrie, relation de Pascal, relation entre $\binom{n}{k}$ et $\binom{n-1}{k-1}$...)
4. Enoncer et démontrer le lien qui existe entre les lois marginales et la loi conjointe.
5. Proposer un exemple de VARD n'admettant pas d'espérance.
6. Démontrer que, sous réserve d'existence, $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - \left(G'_X(1)\right)^2$.
7. Donner l'expression et la démonstration du calcul de l'espérance, de la variance ou de la série génératrice d'une VARD suivant une loi usuelle au programme et choisie par l'examinateur.
8. Déterminer la loi du maximum de n variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la même loi géométrique de paramètre p.
9. Enoncer et démontrer la formule reliant $V(X + Y)$ avec $V(X)$, $V(Y)$ et $\mathrm{cov}(X, Y)$ lorsque X et Y sont deux variables aléatoires discrètes telles que $V(X)$, $V(Y)$ et $\mathrm{cov}(X, Y)$ existent.
10. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Exprimer les probabilités $\mathrm{P}(X = Y)$ et $\mathrm{P}(X \leq Y)$ à l'aide de probabilités faisant intervenir X et Y.

Et la semaine suivante ?

Espaces préhilbertiens