

# Programme de khôlle N°14 - Mathématiques - PC2

Semaine du 10/01/2022 au 14/01/2022

---

## Séries entières (en entier !)

- Notion de série entière
- Rayon de convergence : définition, méthodes de calcul, rayon de la somme et du produit de Cauchy de deux séries entières.
- Séries entières de la variable complexe : continuité de la fonction somme
- Séries entières de la variable réelle : Modes de convergence, continuité de la fonction somme, primitives de la fonction somme, dérivation de la fonction somme.
- Fonctions développables en série entière : définition, lien avec les séries de Taylor, développement des fonctions usuelles.



**Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 10 points suivants, traités en cours ou en exercices.**

1. Donner le DL d'une fonction proposée par l'examinateur.
2. Soient  $\sum a_n x^n$  et  $\sum b_n x^n$  deux séries entières de rayons de convergence respectifs  $R_a$  et  $R_b$ . Si pour  $n$  assez grand, on a  $|a_n| \leq |b_n|$ , alors,  $R_a \geq R_b$ .
3. Proposer, en le justifiant, un exemple de série entière de rayon de convergence 0, une autre de rayon 1 et une dernière de rayon  $+\infty$ .
4. Soit  $(a_n)$  une suite de nombres complexes. On note  $R$ ,  $R_1$  et  $R_2$  les rayons de convergence respectifs des séries entières  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ ,  $\sum_{n \geq 0} \operatorname{Re}(a_n) z^n$  et  $\sum_{n \geq 0} \operatorname{Im}(a_n) z^n$ . Démontrer que  $R = \min(R_1, R_2)$ .
5. Démontrer que la suite  $(\sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas.
6. Démontrer que si  $\sum a_n x^n$  est une série entière de somme  $S$ , alors,  $a_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .
7. Dédire les DSE de  $\cos$ ,  $\sin$ ,  $\operatorname{ch}$  et  $\operatorname{sh}$  de celui de  $\exp$ .
8. Donner le DSE de  $u \mapsto (1+u)^\alpha$ . En déduire celui de  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .
9. Donner 5 DSE que l'on peut déduire (en l'expliquant) de celui de  $\frac{1}{1-x}$  sur  $] -1, 1[$ .
10. Que peut-on dire du DSE d'une fonction paire ? Le démontrer.



Et la semaine suivante ?

Début des variables aléatoires