Programme de khôlle N°14 - Mathématiques - PC2

Semaine du 13/01/2025 au 17/01/2025

Séries entières

- Notion de série entière
- Rayon de convergence : définition, méthodes de calcul, rayon de la somme et du produit de Cauchy de deux séries entières.
- Séries entières de la variable complexe : continuité de la fonction somme
- Séries entières de la variable réelle : Modes de convergence, continuité de la fonction somme, primitives de la fonction somme, dérivation de la fonction somme.
- Fonctions développables en série entière : définition, lien avec les séries de Taylor, développement des fonctions usuelles.

Variables aléatoires discrètes (début !)

- Définition, opérations sur les VARD, loi de probabilité, fonction de répartition.
- Espérance (définition, linéarité, positivité, croissance), théorème de transfert ; Variance et écart-type ; covariance ; variance d'une somme de VARD.
- Couple de VARD : loi conjointe, lois marginales, lois conditionnées.
- Indépendance et mutuelle indépendance de VARD.

Remarque : Pas encore de séries génératrices, ni de lois usuelles cette semaine (ou alors, en les rappelant).

Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 10 points suivants, traités en cours ou en exercices.

1. Donner, en le justifiant, un exemple d'une série entière de rayon 0, une autre de rayon 1 et une dernière de rayon $+\infty$.
2. En s'appuyant sur des schémas, donner la définition du disque de convergence d'une série entière de la variable complexe, et de l'intervalle de convergence d'une série entière de la variable réelle.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} q^k$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} q^k$ et $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} q^k$ lorsque ces quantités sont définies.
4. Démontrer que si $\sum a_n x^n$ est une série entière de somme S, alors, $a_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
5. Démontrer que si f est une fonction DSE paire, alors, tous ses coefficients d'indices impairs sont nuls. Enoncer et démontrer le résultat similaire sur les fonctions impaires.
6. Déduire les DSE de cos, sin, ch et sh de celui de exp.
7. Donner 5 DSE que l'on peut déduire (en l'expliquant) de celui de $\frac{1}{1-x}$ sur $]-1,1[$.
8. Enoncer et démontrer la formule de Koenig-Huygens.
9. Soient X une VARD admettant une variance et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Prouver que $V(aX+b) = a^2 V(X)$.
10. Rappeler la définition de l'espérance et en donner trois propriétés (sans démonstration).

Et la semaine suivante ?

Variables aléatoires (en entier !)