Programme de khôlle N°14 - Mathématiques - PC2

Semaine du 15/01/2018 au 19/01/2018

Séries entières

- Notion de série entière
- Rayon de convergence : définition, méthodes de calcul, rayon de la somme et du produit de Cauchy de deux séries entières.
- Séries entières de la variable complexe : continuité de la fonction somme
- Séries entières de la variable réelle : Modes de convergence, continuité de la fonction somme, primitives de la fonction somme, dérivation de la fonction somme.
- Fonctions développables en série entière : définition, lien avec les séries de Taylor, développement des fonctions usuelles.

Variables aléatoires discrètes (Début)

- Définition, opérations sur les VARD, loi de probabilité, fonction de répartition.
- Couple de VARD : loi conjointe, lois marginales, lois conditionnées.
- Indépendance et mutuelle indépendance de VARD.
- Espérance (définition, linéarité, positivité, croissance), théorème de transfert ; Variance et écart-type ; covariance ; variance d'une somme de VARD ; coefficient de corrélation.
- Inégalité de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.

Attention : *Cette semaine, pas encore de lois usuelles, ni de séries génératrices !*

Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 10 points suivants, traités en cours ou en exercices.

1. Démontrer que si $\sum a_n x^n$ est une série entière de somme S, alors, $a_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. Si pour n assez grand, on a $|a_n| \leq |b_n|$, alors, $R_a \geq R_b$.
3. Déduire les DSE de cos, sin, ch et sh de celui de exp.
4. Calculer, pour tout $(k,n) \in \mathbb{N}^2$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(nx)dx$.
5. Donner le DSE de $u \mapsto (1+u)^\alpha$. En déduire celui de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
6. Soient X une VARD admettant une variance et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Prouver que $V(aX+b) = a^2 V(X)$.
7. Soient X et Y deux VARD admettant un coefficient de corrélation $\rho(X,Y)$. Prouver que $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$.
8. Rappeler la définition de $\dbinom{n}{k}$, puis énoncer et démontrer deux propriétés sur ces coefficients (symétrie, relation de Pascal, relation entre $\dbinom{n}{k}$ et $\dbinom{n-1}{k-1}$...)
9. Enoncer et démontrer le lien qui existe entre les lois marginales et la loi conjointe.
10. Proposer un exemple de VARD n'admettant pas d'espérance.

Et la semaine suivante ?

Variables aléatoires (en entier)