Programme de khôlle N°13 - Mathématiques - PC2

Semaine du 7/01/2019 au 11/01/2019

Séries entières

- Notion de série entière
- Rayon de convergence : définition, méthodes de calcul, rayon de la somme et du produit de Cauchy de deux séries entières.
- Séries entières de la variable complexe : continuité de la fonction somme
- Séries entières de la variable réelle : Modes de convergence, continuité de la fonction somme, primitives de la fonction somme, dérivation de la fonction somme.
- Fonctions développables en série entière : définition, lien avec les séries de Taylor, développement des fonctions usuelles.

Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 10 points suivants, traités en cours ou en exercices.

1. Enoncer et démontrer le lemme d'Abel.
2. Soit (a_n) une suite de nombres complexes. On note R, R_1 et R_2 les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$, $\sum\limits_{n\geq 0} \mathrm{Re}(a_n) z^n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} \mathrm{Im}(a_n) z^n$. Démontrer que $R = \mathrm{Min}(R_1, R_2)$.
3. Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. Que peut-on dire du rayon de convergence de la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$? (on discutera suivant que $R_a = R_b$ ou $R_a \neq R_b$).
4. Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. Si pour n assez grand, on a $|a_n| \leq |b_n|$, alors, $R_a \geq R_b$.
5. Enoncer précisément le DL de quelques fonctions usuelles.
6. Calculer la somme de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$ sur son intervalle ouvert de convergence.
7. Démontrer que si $\sum a_n x^n$ est une série entière de somme S définie sur $]-R, R[$, alors, $a_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
8. Si f est DSE sur $]-R, R[$ sous la forme $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et si f est paire, alors, tous les termes a_{2p+1} sont nuls. Et si f est impaire ?
9. Déduire les DSE de cos, sin, ch et sh de celui de exp.
10. Sachant que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$, calculer $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k^2}$.

Et la semaine suivante ?

Variables aléatoires (début du chapitre !)