Programme de khôlle N°13 - Mathématiques - PC2

Semaine du 06/01/2025 au 10/01/2025

Séries de fonctions

- Convergence simple, convergence uniforme, convergence uniforme sur tout segment, convergence normale, convergence normale sur tout segment d'une série de fonctions. Lien entre les modes de convergence.
- Théorème de continuité de la somme (sous réserve de CVU ou CVU sur tout segment de I), théorème de la double limite.
- Intégration terme à terme sur un segment $[a, b]$ (sous réserve de CVU sur $[a, b]$), dérivation terme à terme (sous réserve de CVS de $\sum f_n$ et de CVU (ou CVU sur tout segment) de $\sum f_n^{'}$), extension à la classe C^k.

Séries entières

- Notion de série entière
- Rayon de convergence : définition, méthodes de calcul, rayon de la somme et du produit de Cauchy de deux séries entières.
- Séries entières de la variable complexe : continuité de la fonction somme
- Séries entières de la variable réelle : Modes de convergence, continuité de la fonction somme, primitives de la fonction somme, dérivation de la fonction somme.
- Fonctions développables en série entière : définition, lien avec les séries de Taylor, développement des fonctions usuelles.

Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 10 points suivants, traités en cours ou en exercices.

1. Calculer la limite de la fonction ζ en $+\infty$.
2. Donner un exemple de la somme d'une série de fonctions continues qui n'est pas continue.
3. Soit $\varepsilon > 0$. Déterminer un entier q tel que $\left|\sum_{n=1}^{q} \frac{(-1)^n}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\right| < \varepsilon$.
4. On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt$. Donner un lien entre I_{n+2} et I_n.
5. On définit la fonction th sur $\mathbb{R}$ par $\text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$. Etude de th.
6. Donner, en le justifiant, un exemple d'une série entière de rayon 0, une autre de rayon 1 et une dernière de rayon $+\infty$.
7. En s'appuyant sur des schémas, donner la définition du disque de convergence d'une série entière de la variable complexe, et de l'intervalle de convergence d'une série entière de la variable réelle.
8. Calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k$, $\sum_{k=1}^{+\infty} q^k$ et $\sum_{k=2}^{+\infty} q^k$ lorsque ces quantités sont définies.
9. Démontrer que si $\sum a_n x^n$ est une série entière de somme S, alors, $a_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
10. Démontrer que si f est une fonction DSE paire, alors, tous ses coefficients d'indices impairs sont nuls. Enoncer et démontrer le résultat similaire sur les fonctions impaires.

Et la semaine suivante ?

Variables aléatoires