Programme de khôlle N°13 - Mathématiques - PC2

Semaine du 03/01/2022 au 07/01/2022

Suites et séries de fonctions

Il s'agit du programme précédent !

Séries entières (début)

- Notion de série entière
- Rayon de convergence : définition, méthodes de calcul, rayon de la somme et du produit de Cauchy de deux séries entières.

Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 10 points suivants, traités en cours ou en exercices.

1. Etude de la CVS, CVN, CVN sur tout segment de la fonction $\zeta : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.
2. La convergence uniforme sur I n'implique pas la convergence normale sur I.
3. Définition, variations et courbes représentatives des fonctions Arccos, Arcsin et Arctan.
4. Si une suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie l'égalité $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer une expression de I_{2n} et I_{2n+1} à l'aide de n, de I_0 et de I_1.
5. On définit la fonction th sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$. Etude de th.
6. Donner le DL d'une fonction proposée par l'examinateur.
7. Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. Si pour n assez grand, on a $|a_n| \leq |b_n|$, alors, $R_a \geq R_b$.
8. Proposer, en le justifiant, un exemple de série entière de rayon de convergence 0, une autre de rayon 1 et une dernière de rayon $+\infty$.
9. Soit (a_n) une suite de nombres complexes. On note R, R_1 et R_2 les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, $\sum_{n\geq 0} \mathrm{Re}(a_n) z^n$ et $\sum_{n\geq 0} \mathrm{Im}(a_n) z^n$. Démontrer que $R = \mathrm{Min}(R_1, R_2)$.
10. Démontrer que la suite $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.

Et la semaine suivante ?

Séries entières (en entier !)