Programme de khôlle N°13 - Mathématiques - PC2

Semaine du 8/01/2024 au 12/01/2024

Séries de fonctions (en entier !)

- Convergence simple, convergence uniforme, convergence uniforme sur tout segment, convergence normale, convergence normale sur tout segment d'une série de fonctions. Lien entre les modes de convergence.
- Théorème de continuité de la somme (sous réserve de CVU ou CVU sur tout segment de I), théorème de la double limite.
- Intégration terme à terme sur un segment $[a, b]$ (sous réserve de CVU sur $[a, b]$), dérivation terme à terme (sous réserve de CVS de $\sum f_n$ et de CVU (ou CVU sur tout segment) de $\sum f_n'$), extension à la classe C^k.

Séries entières (début du chapitre)

- Notion de série entière
- Rayon de convergence : définition, méthodes de calcul, rayon de la somme et du produit de Cauchy de deux séries entières.

Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 10 points suivants, traités en cours ou en exercices.

1. Montrer que la CVS de la suite de fonctions (f_n) vers f ne suffit pas à garantir la continuité de f.
2. Donner un exemple de la somme d'une série de fonctions continues qui n'est pas continue.
3. Etude de la CVS, CVN, CVN sur tout segment de la fonction $\zeta : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.
4. Calculer la limite de la fonction ζ en $+\infty$.
5. Donner un exemple d'une série de fonctions $\sum f_n$ qui CVS sur un intervalle I mais qui ne converge normalement sur aucun segment de I.
6. On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt$. Donner un lien entre I_{n+2} et I_n.
7. On définit la fonction th sur $\mathbb{R}$ par $\text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$. Etude de th.
8. Donner, en le justifiant, un exemple d'une série entière de rayon 0, une autre de rayon 1 et une dernière de rayon $+\infty$.
9. En s'appuyant sur des schémas, donner la définition du disque de convergence d'une série entière de la variable complexe, et de l'intervalle de convergence d'une série entière de la variable réelle.
10. Calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k$, $\sum_{k=1}^{+\infty} q^k$ et $\sum_{k=2}^{+\infty} q^k$ lorsque ces quantités sont définies.

Et la semaine suivante ?

Toutes les séries entières