Programme de khôlle N°13 - Mathématiques - PC2

Semaine du 8/01/2018 au 12/01/2018

Suites et séries de fonctions (chapitre entier)

Dans ce chapitre, les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

- Convergence simple et convergence uniforme d'une suite de fonctions. Lien entre les modes de conv.
- Convergence simple, convergence uniforme, convergence uniforme sur tout segment, convergence normale, convergence normale sur tout segment d'une série de fonctions. Lien entre les modes de convergence.
- Pour les suites de fonctions : continuité de la limite simple (sous réserve de CVU ou de CVU sur tout segment), intégration de la limite simple <u>sur un segment $[a, b]$</u> (sous réserve de CVU sur $[a, b]$), caractère C^1 de la limite simple (sous réserve de la CVS de (f_n) et de la CVU (ou CVU sur tout segment) de (f_n')). Généralisation au caractère C^k.
- Pour les séries de fonctions : théorème de continuité de la somme (sous réserve de CVU ou CVU sur tout segment de I), intégration terme à terme <u>sur un segment $[a, b]$</u> (sous réserve de CVU sur $[a, b]$), dérivation terme à terme (sous réserve de CVS de $\sum f_n$ et de CVU (ou CVU sur tout segment) de $\sum f_n'$), extension à la classe C^k.

<u>*Remarque :*</u> *Le théorème de la double limite n'est plus au programme de la filière PC !*

Séries entières

- Notion de série entière
- Rayon de convergence : définition, méthodes de calcul, rayon de la somme et du produit de Cauchy de deux séries entières.
- Séries entières de la variable complexe : continuité de la fonction somme
- Séries entières de la variable réelle : Modes de convergence, continuité de la fonction somme, primitives de la fonction somme, dérivation de la fonction somme.
- Fonctions développables en série entière : définition, lien avec les séries de Taylor, développement des fonctions usuelles.

Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 10 points suivants, traités en cours ou en exercices.

1. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt$. Donner un lien entre I_{n+2} et I_n.
2. On définit la fonction th sur $\mathbb{R}$ par $\text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$. Etude de th.
3. Montrer que la CVS de la suite de fonctions (f_n) vers f ne suffit pas à garantir la continuité de f.
4. Proposer un exemple de suite de fonctions (f_n) telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt \neq \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt$.
5. Donner le DL d'une fonction proposée par l'examinateur.
6. Démontrer que si $\sum a_n x^n$ est une série entière de somme S, alors, $a_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
7. Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. Si pour n assez grand, on a $|a_n| \leq |b_n|$, alors, $R_a \geq R_b$.
8. Déduire les DSE de cos, sin, ch et sh de celui de exp.
9. Calculer, pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(nx)dx$.
10. Donner le DSE de $u \mapsto (1 + u)^\alpha$. En déduire celui de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Et la semaine suivante ?

Variables aléatoires discrètes