Programme de khôlle N°12 - Mathématiques - PC2

Semaine du 16/12/2024 au 20/12/2024

Suites de fonctions (en entier !)

Dans ce chapitre, les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

- Convergence simple et convergence uniforme d'une suite de fonctions. Lien entre les deux modes de convergence.
- Continuité de la limite simple (sous réserve de CVU ou de CVU sur tout segment), intégration de la limite simple sur un segment $[a, b]$ (sous réserve de CVU sur $[a, b]$), caractère C^1 de la limite simple (sous réserve de la CVS de (f_n) et de la CVU (ou CVU sur tout segment) de $(f_n^{'})$). Généralisation au caractère C^k.

Séries de fonctions (en entier !)

- Convergence simple, convergence uniforme, convergence uniforme sur tout segment, convergence normale, convergence normale sur tout segment d'une série de fonctions. Lien entre les modes de convergence.
- Théorème de continuité de la somme (sous réserve de CVU ou CVU sur tout segment de I), théorème de la double limite.
- Intégration terme à terme sur un segment $[a, b]$ (sous réserve de CVU sur $[a, b]$), dérivation terme à terme (sous réserve de CVS de $\sum f_n$ et de CVU (ou CVU sur tout segment) de $\sum f_n^{'}$), extension à la classe C^k.

Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 10 points suivants, traités en cours ou en exercices.

1. Démontrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n+x}$ CVU sur $\mathbb{R}_+$.
2. Etude de la CVS, CVN, CVN sur tout segment de la fonction $\zeta : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.
3. Donner un exemple d'une série de fonctions $\sum f_n$ qui CVS sur un intervalle I mais qui ne converge normalement sur aucun segment de I.
4. Démontrer que $(M, N) \mapsto \mathrm{Tr}\left(M^{\mathsf{T}} N\right)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
5. Montrer que la CVS de la suite de fonctions (f_n) vers f ne suffit pas à garantir la continuité de f.
6. Calculer la limite de la fonction ζ en $+\infty$.
7. Donner un exemple de la somme d'une série de fonctions continues qui n'est pas continue.
8. Soit $\varepsilon > 0$. Déterminer un entier q tel que $\left|\displaystyle\sum_{n=1}^{q} \frac{(-1)^n}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\right| < \varepsilon$.
9. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt$. Donner un lien entre I_{n+2} et I_n.
10. On définit la fonction th sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$. Etude de th.

Et après les vacances de Noël ?

Les séries entières