Programme de khôlle N°12 - Mathématiques - PC2

Semaine du 13/12/2021 au 17/12/2021

Suites et séries de fonctions

Dans ce chapitre, les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

- Convergence simple et convergence uniforme d'une suite de fonctions. Lien entre les modes de conv.
- Convergence simple, convergence uniforme, convergence uniforme sur tout segment, convergence normale, convergence normale sur tout segment d'une série de fonctions. Lien entre les modes de convergence.
- Pour les suites de fonctions : continuité de la limite simple (sous réserve de CVU ou de CVU sur tout segment), intégration de la limite simple <u>sur un segment $[a, b]$</u> (sous réserve de CVU sur $[a, b]$), caractère C^1 de la limite simple (sous réserve de la CVS de (f_n) et de la CVU (ou CVU sur tout segment) de (f_n')). Généralisation au caractère C^k.
- Pour les séries de fonctions : théorème de continuité de la somme (sous réserve de CVU ou CVU sur tout segment de I), intégration terme à terme <u>sur un segment $[a, b]$</u> (sous réserve de CVU sur $[a, b]$), dérivation terme à terme (sous réserve de CVS de $\sum f_n$ et de CVU (ou CVU sur tout segment) de $\sum f_n'$), extension à la classe C^k.

Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 10 points suivants, traités en cours ou en exercices.

1. Démontrer qu'une union quelconque d'ouverts est un ouvert.
2. Proposer un exemple de suite de fonctions qui CVS mais qui ne converge pas uniformément.
3. Démontrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est une partie ouverte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Démontrer que l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \left(\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}), \|.\|_2\right) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, |.|) \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(t)dt \end{array}$ est lipschitzienne.
5. Soit $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = I_n$. Démontrer que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(R + I_n) \oplus \mathrm{Ker}(R - I_n)$.
6. Etude de la CVS, CVN, CVN sur tout segment de la fonction $\zeta : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.
7. La convergence uniforme sur I n'implique pas la convergence normale sur I.
8. Définition, variations et courbes représentatives des fonctions Arccos, Arcsin et Arctan.
9. Si une suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie l'égalité $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer une expression de I_{2n} et I_{2n+1} à l'aide de n, de I_0 et de I_1.
10. On définit la fonction th sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$. Etude de th.

Et après les vacances de Noël ?

Séries entières (le début !)