

Programme de khôlle N°12 - Mathématiques - PC2

Semaine du 18/12/2023 au 22/12/2023

Topologie dans les EVN (en entier!)

Il s'agit du programme précédent!

Suites de fonctions (en entier!)

Dans ce chapitre, les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I de \mathbb{R} et sont à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C}

- Convergence simple et convergence uniforme d'une suite de fonctions. Lien entre les deux modes de convergence.
- Continuité de la limite simple (sous réserve de CVU ou de CVU sur tout segment), intégration de la limite simple sur un segment $[a, b]$ (sous réserve de CVU sur $[a, b]$), caractère C^1 de la limite simple (sous réserve de la CVS de (f_n) et de la CVU (ou CVU sur tout segment) de (f'_n)). Généralisation au caractère C^k .

Séries de fonctions (en entier!)

- Convergence simple, convergence uniforme, convergence uniforme sur tout segment, convergence normale, convergence normale sur tout segment d'une série de fonctions. Lien entre les modes de convergence.
- Théorème de continuité de la somme (sous réserve de CVU ou CVU sur tout segment de I), théorème de la double limite.
- Intégration terme à terme sur un segment $[a, b]$ (sous réserve de CVU sur $[a, b]$), dérivation terme à terme (sous réserve de CVS de $\sum f_n$ et de CVU (ou CVU sur tout segment) de $\sum f'_n$), extension à la classe C^k .



Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 10 points suivants, traités en cours ou en exercices.

1. Démontrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est une partie ouverte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. L'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-il ouvert? fermé?
3. Donner la définition, le tableau de variations et la courbe d'une fonction choisie par l'examinateur parmi Arcos, Arcsin ou Arctan.
4. Expliquer pourquoi une fonction k -lipschitzienne est continue.
5. Donner un exemple d'une application linéaire continue et un exemple d'une application bilinéaire continue.
6. Montrer que la CVS de la suite de fonctions (f_n) vers f ne suffit pas à garantir la continuité de f .
7. Donner un exemple de la somme d'une série de fonctions continues qui n'est pas continue.
8. Etude de la CVS, CVN, CVN sur tout segment de la fonction $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.
9. Calculer la limite de la fonction ζ en $+\infty$.
10. Donner un exemple d'une série de fonctions $\sum f_n$ qui CVS sur un intervalle I mais qui ne converge normalement sur aucun segment de I .



Et après les vacances de Noël?

Début des séries entières