

Programme de khôlle N°12 - Mathématiques - PC2

Semaine du 17/12/2018 au 21/12/2018

Suites et séries de fonctions

Il s'agit du programme précédent !

Séries entières (début du chapitre)

- Notion de série entière
- Rayon de convergence : définition, méthodes de calcul, rayon de la somme et du produit de Cauchy de deux séries entières.



Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 5 points suivants, traités en cours ou en exercices.

1. La fonction ζ est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$ et sa dérivée est $x \mapsto -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^x}$.
2. On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$. Donner un lien entre I_{n+2} et I_n .
3. On définit la fonction th sur \mathbb{R} par $\text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$. Etude de th.
4. Enoncer et démontrer le théorème d'intégration sur un segment d'une suite de fonctions.
5. Montrer que la CVS de la suite de fonctions (f_n) vers f ne suffit pas à garantir la continuité de f .
6. Enoncer et démontrer le lemme d'Abel.
7. Soit (a_n) une suite de nombres complexes. On note R , R_1 et R_2 les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, $\sum_{n \geq 0} \text{Re}(a_n) z^n$ et $\sum_{n \geq 0} \text{Im}(a_n) z^n$. Démontrer que $R = \text{Min}(R_1, R_2)$.
8. Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b . Que peut-on dire du rayon de convergence de la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$? (on discutera suivant que $R_a = R_b$ ou $R_a \neq R_b$).
9. Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b . Si pour n assez grand, on a $|a_n| \leq |b_n|$, alors, $R_a \geq R_b$.
10. Enoncer précisément le DL de quelques fonctions usuelles.



Et en 2019 ?

Séries entières (tout le chapitre !)