

# Programme de khôlle N°12 - Mathématiques - PC2

Semaine du 18/12/2017 au 22/12/2017

---

## Suites et séries de fonctions (chapitre entier)

Dans ce chapitre, les fonctions considérées sont définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et sont à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$

- Convergence simple et convergence uniforme d'une suite de fonctions. Lien entre les modes de conv.
- Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale sur tout segment, convergence normale, convergence normale sur tout segment d'une série de fonctions. Lien entre les modes de convergence.
- Pour les suites de fonctions : continuité de la limite simple (sous réserve de CVU ou de CVU sur tout segment), intégration de la limite simple sur un segment  $[a, b]$  (sous réserve de CVU sur  $[a, b]$ ), caractère  $C^1$  de la limite simple (sous réserve de la CVS de  $(f_n)$  et de la CVU (ou CVU sur tout segment) de  $(f'_n)$ ). Généralisation au caractère  $C^k$ .
- Pour les séries de fonctions : théorème de continuité de la somme (sous réserve de CVU ou CVU sur tout segment de  $I$ ), intégration terme à terme sur un segment  $[a, b]$  (sous réserve de CVU sur  $[a, b]$ ), dérivation terme à terme (sous réserve de CVS de  $\sum f_n$  et de CVU (ou CVU sur tout segment) de  $\sum f'_n$ ), extension à la classe  $C^k$ .

Remarque : Le théorème de la double limite n'est plus au programme de la filière PC!



**Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 10 points suivants, traités en cours ou en exercices.**

1. Proposer un exemple de suite de fonctions qui CVS mais qui ne converge pas uniformément.
2. Etude de la CVS, CVN, CVU sur tout segment de la fonction  $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ .
3. La convergence normale sur  $I$  implique la convergence uniforme sur  $I$ .
4. La convergence uniforme sur  $I$  n'implique pas la convergence normale sur  $I$ .
5. Définition, variations et courbes représentatives des fonctions Arccos, Arcsin et Arctan.
6. On pose  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$ . Donner un lien entre  $I_{n+2}$  et  $I_n$ .
7. On définit la fonction th sur  $\mathbb{R}$  par  $\text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$ . Etude de th.
8. Montrer que la CVS de la suite de fonctions  $(f_n)$  vers  $f$  ne suffit pas à garantir la continuité de  $f$ .
9. Proposer un exemple de suite de fonctions  $(f_n)$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt \neq \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt$ .
10. Donner le DL d'une fonction proposée par l'examineur.



Et après les vacances de Noël ?  
Séries entières (début)