

Programme de khôlle N°11 - Mathématiques - PC2

Semaine du 10/12/2018 au 14/12/2018

Suites et séries de fonctions

Dans ce chapitre, les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I de \mathbb{R} et sont à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C}

- Convergence simple et convergence uniforme d'une suite de fonctions. Lien entre les deux modes de convergence.
- Convergence simple, convergence uniforme, convergence uniforme sur tout segment, convergence normale, convergence normale sur tout segment d'une série de fonctions. Lien entre les modes de convergence.
- Pour les suites de fonctions : continuité de la limite simple (sous réserve de CVU ou de CVU sur tout segment), intégration de la limite simple sur un segment $[a, b]$ (sous réserve de CVU sur $[a, b]$), caractère C^1 de la limite simple (sous réserve de la CVS de (f_n) et de la CVU (ou CVU sur tout segment) de (f'_n)). Généralisation au caractère C^k .
- Pour les séries de fonctions : théorème de continuité de la somme (sous réserve de CVU ou CVU sur tout segment de I), intégration terme à terme sur un segment $[a, b]$ (sous réserve de CVU sur $[a, b]$), dérivation terme à terme (sous réserve de CVS de $\sum f_n$ et de CVU (ou CVU sur tout segment) de $\sum f'_n$), extension à la classe C^k .

Remarque : Le théorème de la double limite n'est plus au programme de la filière PC!



Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 5 points suivants, traités en cours ou en exercices.

1. Soit f une application continue sur un evn (E, N) de dimension finie et à valeurs dans \mathbb{R} . L'ensemble $O = \{x \in E, f(x) > 0\}$ est un ouvert de E .
2. Si (f_n) CVU, alors, (f_n) CVS, mais la réciproque est fausse.
3. Etude de la CVS, CVN, CVN sur tout segment de la fonction $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.
4. La convergence normale sur I implique la convergence simple sur I , mais la réciproque est fausse.
5. Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Prouver que la fonction $t \mapsto \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
6. La fonction ζ est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$ et sa dérivée est $x \mapsto -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^x}$.
7. On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$. Donner un lien entre I_{n+2} et I_n .
8. On définit la fonction th sur \mathbb{R} par $\text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$. Etude de th.
9. Enoncer et démontrer le théorème d'intégration sur un segment d'une suite de fonctions.
10. Montrer que la CVS de la suite de fonctions (f_n) vers f ne suffit pas à garantir la continuité de f .



Et la semaine suivante ?

Séries entières