

Programme de khôlle N°11 - Mathématiques - PC2

Semaine du 11/12/2023 au 15/12/2023

Topologie dans les EVN (en entier!)

- Topologie dans un evn de dimension finie : partie ouverte, partie fermée, réunion et intersection de parties ouvertes ou de parties fermées ; définition d'un point adhérent et d'un point intérieur ; intérieur, adhérence et frontière d'une partie ; parties denses. **Par contre, toujours pas le mot "compact" au programme en PC !**
- Limite d'une application entre deux evn de dimension finie ; caractérisation des limites à l'aide des fonctions coordonnées ; limite de l'image d'une suite convergente.
- Continuité sur une partie ; continuité d'une application lipschitzienne ; caractérisation de la continuité à l'aide des fonctions coordonnées ; image directe d'un fermé-borné par une application continue ; image réciproque d'un fermé ou d'un ouvert par une application continue (cela a surtout été vu pour déterminer la nature topologique d'ensembles de la forme $\{x \in E / f(x) > 0\}$...)
- Continuité des applications linéaires et multilinéaires définies sur un espace de dimension finie ; continuité du déterminant.

Suites de fonctions (début)

Dans ce chapitre, les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I de \mathbb{R} et sont à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C}

- Convergence simple et convergence uniforme d'une suite de fonctions. Lien entre les deux modes de convergence.



Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 10 points suivants, traités en cours ou en exercices.

1. Les normes $\| \cdot \|_2$ et $\| \cdot \|_\infty$ sur $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ sont-elles équivalentes ?
2. Démontrer que si deux normes sont équivalentes, alors, toute suite qui converge vers ℓ pour l'une des deux normes converge aussi vers ℓ pour l'autre norme.
3. Toute boule ouverte est un ouvert.
4. Nature topologique d'une union quelconque d'ouverts, ou d'une intersection finie d'ouverts.
5. Nature de l'intégrale généralisée $\int_e^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha \ln(t)} dt$.
6. Démontrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est une partie ouverte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
7. L'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-il ouvert ? fermé ?
8. Donner la définition, le tableau de variations et la courbe d'une fonction choisie par l'examinateur parmi Arccos, Arcsin ou Arctan.
9. Expliquer pourquoi une fonction k -lipschitzienne est continue.
10. Donner un exemple d'une application linéaire continue et un exemple d'une application bilinéaire continue.



Et la semaine suivante ?

Suites et séries de fonctions