

Programme de khôlle N°11 - Mathématiques - PC2

Semaine du 06/12/2021 au 10/12/2021

Espaces vectoriels normés de dimension finie

- En dimension finie, la convergence d'une suite ne dépend pas de la norme utilisée.
- Suites dans un evn de dimension finie : caractérisation de la convergence à l'aide de la convergence des coordonnées.
- Topologie dans un evn de dimension finie : partie ouverte, partie fermée, réunion et intersection de parties ouvertes ou de parties fermées; définition d'un point adhérent et d'un point intérieur; intérieur, adhérence et frontière d'une partie.

Suites et séries de fonctions (début du chapitre)

Dans ce chapitre, les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I de \mathbb{R} et sont à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C}

- Convergence simple et convergence uniforme d'une suite de fonctions. Lien entre les modes de conv.



Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 10 points suivants, traités en cours ou en exercices.

1. Démontrer que le produit de deux fonctions lipschitziennes et bornées sur \mathbb{R} est encore une fonction lipschitzienne sur \mathbb{R} .
2. Énoncer et démontrer les identités de polarisation et l'identité du parallélogramme.
3. Toute boule ouverte est un ouvert.
4. Toute boule fermée est un fermé.
5. Pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, calculer $\int_0^\pi \cos(p\theta) \cos(q\theta) d\theta$.
6. Démontrer qu'une union quelconque d'ouverts est un ouvert.
7. Proposer un exemple de suite de fonctions qui CVS mais qui ne converge pas uniformément.
8. Démontrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est une partie ouverte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
9. Démontrer que l'application $\varphi : \begin{matrix} (\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_2) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, |\cdot|) \\ f & \longmapsto & \int_a^b f(t) dt \end{matrix}$ est lipschitzienne.
10. Soit $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = I_n$. Démontrer que $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(R + I_n) \oplus \text{Ker}(R - I_n)$.



Et la semaine suivante ?

Suites et séries de fonctions (en entier !)