Programme de khôlle N°10 - Mathématiques - PC2

Semaine du 4/12/2017 au 8/12/2017

Généralités sur les espaces vectoriels normés

- Définition d'une norme ; normes euclidiennes, distances.
- Boules, sphères, parties bornées.
- Normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$.
- Normes usuelles sur les espaces de fonctions : $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$. La norme $\|.\|_1$ a été vue, mais n'est pas au programme de PC.
- Applications k-lipschitziennes.
- Suites bornées, suites convergentes.

Remarque : La notion de « Normes équivalentes » n'est plus au programme, ce qui n'empêche pas d'essayer de comparer des normes avec des inégalités.

Espaces vectoriels normés de dimension finie

- En dimension finie, la convergence d'une suite ne dépend pas de la norme utilisée.
- Suites dans un evn de dimension finie : caractérisation de la convergence à l'aide de la convergence des coordonnées.
- Topologie dans un evn de dimension finie : partie ouverte, partie fermée, réunion et intersection de parties ouvertes ou de parties fermées ; définition d'un point adhérent et d'un point intérieur ; intérieur, adhérence et frontière d'une partie.
  La caractérisation séquentielle des fermés a été vue en exercices ; La propriété parlant des images réciproques d'un fermé ou d'un ouvert n'est pas au programme ! La notion de compact n'est pas au programme !
- Limite d'une application entre deux evn de dimension finie ; caractérisation des limites à l'aide des fonctions coordonnées ; limite de l'image d'une suite convergente.
- Continuité sur une partie ; continuité d'une application lipschitzienne ; caractérisation de la continuité à l'aide des fonctions coordonnées ; image directe d'un fermé-borné par une application continue.
- Continuité des applications linéaires et multilinéaires définies sur un espace de dimension finie.

Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 10 points suivants, traités en cours ou en exercices.

1. Soit (E,N) un espace vectoriel normé. Démontrer que $x \mapsto N(x)$ est lipschitzienne de (E,N) dans $(\mathbb{R},|.|)$.
2. Enoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
3. Dessiner, en le justifiant, les boules unités fermées de $\mathbb{R}^2$ relativement aux normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$.
4. Si $x \in \mathbb{K}^n$, savoir comparer deux normes (choisies par le khôlleur) parmi les normes $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ et $\|x\|_\infty$.
5. Démontrer que le produit de deux fonctions lipschitziennes et bornées sur $\mathbb{R}$ est encore une fonction lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
6. Toute boule ouverte est un ouvert.
7. Toute boule fermée est un fermé.
8. Nature topologique d'une union quelconque d'ouverts, ou d'une intersection finie d'ouverts.
9. Soient (E,N) un evn de dimension finie, et A une partie de E. Démontrer que si toute suite convergente d'éléments de A a sa limite dans A, alors, A est fermée.
10. Soit f une application continue sur un evn (E,N) de dimension finie et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
    L'ensemble $O = \{x \in E \,,\, f(x) > 0\}$ est un ouvert de E.

Et la semaine suivante ?

Suites et séries de fonctions