Programme de khôlle N°10 - Mathématiques - PC2

Semaine du 2/12/2024 au 6/12/2024

Généralités sur les espaces vectoriels normés

- Définition d'une norme; normes euclidiennes, distances.
- Boules, sphères, parties bornées.
- Normes $||.||_1$, $||.||_2$ et $||.||_{\infty}$ sur \mathbb{K}^n .
- Normes usuelles sur les espaces de fonctions : $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$. La norme $\|.\|_1$ a été vue, mais n'est pas au programme de PC.
- Applications k-lipschitziennes.
- Suites bornées, suites convergentes.
- ullet Normes équivalentes, comparaison des normes usuelles de \mathbb{K}^n , équivalence des normes en dimension finie.
- Suites dans un EVN de dimension finie caractérisation de la convergence à l'aide des suites de coordonnées.

Topologie dans les EVN (en entier!)

- Topologie dans un evn de dimension finie : partie ouverte, partie fermée, réunion et intersection de parties ouvertes ou de parties fermées ; définition d'un point adhérent et d'un point intérieur ; intérieur, adhérence et frontière d'une partie ; parties denses. Par contre, toujours pas le mot "compact" au programme en PC!
- Limite d'une application entre deux evn de dimension finie; caractérisation des limites à l'aide des fonctions coordonnées; limite de l'image d'une suite convergente.
- Continuité sur une partie; continuité d'une application lipschitzienne; caractérisation de la continuité à l'aide des fonctions coordonnées; image directe d'un fermé-borné par une application continue; image réciproque d'un fermé ou d'un ouvert par une application continue (cela a surtout été vu pour déterminer la nature topologique d'ensembles de la forme {x ∈ E / f(x) > 0}...)
- Continuité des applications linéaires et multilinéaires définies sur un espace de dimension finie ; continuité du déterminant.



Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 10 points suivants, traités en cours ou en exercices.

- 1. Si $x \in \mathbb{K}^n$, savoir comparer (en le justifiant!) $||x||_1$, $||x||_2$ et $||x||_{\infty}$.
- 2. Les normes $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_{\infty}$ sur $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ sont-elles équivalentes?
- 3. Démontrer que si deux normes sont équivalentes, alors, toute suite qui converge vers ℓ pour l'une des deux normes converge aussi vers ℓ pour l'autre norme.
- 4. Toute boule ouverte est un ouvert.
- 5. Nature topologique d'une union quelconque d'ouverts, ou d'une intersection finie d'ouverts.
- 6. Démontrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est une partie ouverte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- 7. Expliquer pourquoi une fonction k-lipschitzienne est continue.
- 8. Donner un exemple d'une application linéaire continue et un exemple d'une application bilinéaire continue.
- 9. Donner un exemple d'une fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée et intégrable, et d'une autre fonction $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée et non intégrable.
- 10. Démontrer de deux manières qu'un singleton $\{x_0\}$ est une partie fermée.



Et la semaine suivante?

Suites de fonctions