

Programme de khôlle N°10 - Mathématiques - PC2

Semaine du 3/12/2018 au 7/12/2018

Espaces vectoriels normés de dimension finie

- En dimension finie, la convergence d'une suite ne dépend pas de la norme utilisée.
- Suites dans un evn de dimension finie : caractérisation de la convergence à l'aide de la convergence des coordonnées.
- Topologie dans un evn de dimension finie : partie ouverte, partie fermée, réunion et intersection de parties ouvertes ou de parties fermées; définition d'un point adhérent et d'un point intérieur; intérieur, adhérence et frontière d'une partie.
La caractérisation séquentielle des fermés a été vue en exercices; La propriété parlant des images réciproques d'un fermé ou d'un ouvert n'est pas au programme! La notion de compact n'est pas au programme!
- Limite d'une application entre deux evn de dimension finie; caractérisation des limites à l'aide des fonctions coordonnées; limite de l'image d'une suite convergente.
- Continuité sur une partie; continuité d'une application lipschitzienne; caractérisation de la continuité à l'aide des fonctions coordonnées; image directe d'un fermé-borné par une application continue.
- Continuité des applications linéaires et multilinéaires définies sur un espace de dimension finie.

Suites de fonctions (début du chapitre)

Dans ce chapitre, les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I de \mathbb{R} et sont à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C}

- Convergence simple et convergence uniforme d'une suite de fonctions. Lien entre les deux modes de convergence.



Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 5 points suivants, traités en cours ou en exercices.

1. Toute boule ouverte est un ouvert.
2. Nature topologique d'une union quelconque d'ouverts, ou d'une intersection finie d'ouverts.
3. Soient (E, N) un evn de dimension finie, et A une partie de E . Démontrer que si toute suite convergente d'éléments de A a sa limite dans A , alors, A est fermée.
4. Soient (E, N) un EVN de dimension finie et $x_0 \in E$. Prouver que $\{x_0\}$ est un fermé de E .
5. L'expression $\langle A, B \rangle = \text{Tr}({}^t A \times B)$ permet de définir un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
6. Soit f une application continue sur un evn (E, N) de dimension finie et à valeurs dans \mathbb{R} . L'ensemble $O = \{x \in E, f(x) > 0\}$ est un ouvert de E .
7. Si (f_n) CVU, alors, (f_n) CVS, mais la réciproque est fausse.
8. Etude de la CVS, CVN, CVN sur tout segment de la fonction $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.
9. La convergence normale sur I implique la convergence simple sur I , mais la réciproque est fausse.
10. Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Prouver que la fonction $t \mapsto \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.



Et la semaine suivante ?

Suites et séries de fonctions