

# Programme de khôlle N°10 - Mathématiques - PC2

Semaine du 29/11/2021 au 03/12/2021

---

## Généralités sur les espaces vectoriels normés

- Définition d'une norme ; normes euclidiennes, distances.
- Boules, sphères, parties bornées.
- Normes  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_\infty$  sur  $\mathbb{K}^n$ .
- Normes usuelles sur les espaces de fonctions :  $\|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_\infty$ . La norme  $\|\cdot\|_1$  a été vue, mais n'est pas au programme de PC.
- Applications  $k$ -lipschitziennes.
- Suites bornées, suites convergentes.

**Remarque :** La notion de « Normes équivalentes » n'est plus au programme, ce qui n'empêche pas d'essayer de comparer des normes avec des inégalités.

## Espaces vectoriels normés de dimension finie (début du chapitre)

- En dimension finie, la convergence d'une suite ne dépend pas de la norme utilisée.
- Suites dans un evn de dimension finie : caractérisation de la convergence à l'aide de la convergence des coordonnées.
- Topologie dans un evn de dimension finie : partie ouverte, partie fermée, réunion et intersection de parties ouvertes ou de parties fermées ; définition d'un point adhérent et d'un point intérieur ; intérieur, adhérence et frontière d'une partie.

**Remarque :** A cause du férié du 11 novembre et du forum, les élèves n'ont pas eu le temps de beaucoup s'exercer sur ce dernier chapitre!



Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 10 points suivants, traités en cours ou en exercices.

1. Que dire de la quantité  $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$  lorsque  $x \in \mathbb{R}^*$  ?
2. Soit  $(E, N)$  un espace vectoriel normé. Démontrer que  $x \mapsto N(x)$  est lipschitzienne de  $(E, N)$  dans  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ .
3. Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
4. Dessiner, en le justifiant, les boules unités fermées de  $\mathbb{R}^2$  relativement aux normes  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_\infty$ .
5. Si  $x \in \mathbb{K}^n$ , savoir comparer deux normes (choisies par le khôlleur) parmi les normes  $\|x\|_1$ ,  $\|x\|_2$  et  $\|x\|_\infty$ .
6. Démontrer que le produit de deux fonctions lipschitziennes et bornées sur  $\mathbb{R}$  est encore une fonction lipschitzienne sur  $\mathbb{R}$ .
7. Énoncer et démontrer les identités de polarisation et l'identité du parallélogramme.
8. Toute boule ouverte est un ouvert.
9. Toute boule fermée est un fermé.
10. Pour  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ , calculer  $\int_0^\pi \cos(p\theta) \cos(q\theta) d\theta$ .



Et la semaine suivante ?

EVN de dimension finie (en entier !)