

Programme de khôle N°9 - Mathématiques - PC2

Semaine du 22/11/2021 au 26/11/2021

Intégration sur un intervalle quelconque

Il s'agit du programme de la semaine précédente!

Généralités sur les espaces vectoriels normés

- Définition d'une norme ; normes euclidiennes, distances.
- Boules, sphères, parties bornées.
- Normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur \mathbb{K}^n .
- Normes usuelles sur les espaces de fonctions : $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$. La norme $\|\cdot\|_1$ a été vue, mais n'est pas au programme de PC.
- Applications k -lipschitziennes.
- Suites bornées, suites convergentes.

Remarque : La notion de « Normes équivalentes » n'est plus au programme, ce qui n'empêche pas d'essayer de comparer des normes avec des inégalités.



Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 10 points suivants, traités en cours ou en exercices.

1. Démontrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente.
2. Prouver que la quantité $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t}$ existe si et seulement si $\alpha > 0$.
3. Pour tout $x > 0$, trouver une relation entre $\Gamma(x)$ et $\Gamma(x+1)$.
4. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$, et dans ce cas, cette intégrale vaut $\frac{1}{\alpha-1}$.
5. Démontrer, par un simple argument d'encadrement, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x^3} dx = 0$.
6. Que dire de la quantité $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$ lorsque $x \in \mathbb{R}^*$?
7. Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Démontrer que $x \mapsto N(x)$ est lipschitzienne de (E, N) dans $(\mathbb{R}, |.)$.
8. Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
9. Dessiner, en le justifiant, les boules unités fermées de \mathbb{R}^2 relativement aux normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.
10. Si $x \in \mathbb{K}^n$, savoir comparer deux normes (choisies par le khôleur) parmi les normes $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ et $\|x\|_\infty$.



Et la semaine suivante ?

EVN de dimension finie