Programme de khôlle N°9 - Mathématiques - PC2

Semaine du 27/11/2017 au 1/12/2017

Intégration sur un intervalle quelconque

- Fonctions continues par morceaux.
- Définition d'une intégrale impropre convergente (cas des intervalles $[a,b[$, $]a,b]$ et $]a,b[$).
- Le cas des fonctions à valeurs complexes.
- Exemples fondamentaux : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}dt$, $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}dt$.
- Intégrales de fonctions positives : relations entre la convergence ou la divergence des intégrales de f et g dans le cas où $f \leq g$, $f = O(g)$ et $f \sim g$.
- Convergence absolue.
- Fonctions intégrables.
- Propriétés des fonctions intégrables (nullité de l'intégrale, Relation de Chasles, inégalité de la moyenne)
- Changement de variable ; intégration par parties.
- Comparaison séries-intégrales.

Généralités sur les espaces vectoriels normés

- Définition d'une norme ; normes euclidiennes, distances.
- Boules, sphères, parties bornées.
- Normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$.
- Normes usuelles sur les espaces de fonctions : $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$. La norme $\|.\|_1$ a été vue, mais n'est pas au programme de PC.
- Applications k-lipschitziennes.
- Suites bornées, suites convergentes.

Remarque : La notion de « Normes équivalentes » n'est plus au programme, ce qui n'empêche pas d'essayer de comparer des normes avec des inégalités.

Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 10 points suivants, traités en cours ou en exercices.

1. Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ est convergente.
2. La quantité $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}$ existe si et seulement si $\alpha > 0$.
3. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$, et dans ce cas, cette intégrale vaut $\frac{1}{\alpha-1}$.
4. Prouver la convergence et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin(t)dt$.
5. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln^\beta(t)}dt$ est-elle convergente ?
6. Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Démontrer que $x \mapsto N(x)$ est lipschitzienne de (E, N) dans $(\mathbb{R}, |.|)$.
7. Enoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
8. Dessiner, en le justifiant, les boules unités fermées de $\mathbb{R}^2$ relativement aux normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$.
9. Si $x \in \mathbb{K}^n$, savoir comparer deux normes (choisies par le khôlleur) parmi les normes $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ et $\|x\|_\infty$.
10. Démontrer que le produit de deux fonctions lipschitziennes et bornées sur $\mathbb{R}$ est encore une fonction lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Et la semaine suivante ?

Espaces vectoriels normés de dimension finie