Programme de khôlle N°9 - Mathématiques - PC2

Semaine du 26/11/2018 au 30/11/2018

Généralités sur les espaces vectoriels normés

- Définition d'une norme ; normes euclidiennes, distances.
- Boules, sphères, parties bornées.
- Normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$.
- Normes usuelles sur les espaces de fonctions : $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$. La norme $\|.\|_1$ a été vue, mais n'est pas au programme de PC.
- Applications k-lipschitziennes.
- Suites bornées, suites convergentes.

Remarque : La notion de « Normes équivalentes » n'est plus au programme, ce qui n'empêche pas d'essayer de comparer des normes avec des inégalités.

Espaces vectoriels normés de dimension finie (début)

- En dimension finie, la convergence d'une suite ne dépend pas de la norme utilisée.
- Suites dans un evn de dimension finie : caractérisation de la convergence à l'aide de la convergence des coordonnées.
- Topologie dans un evn de dimension finie : partie ouverte, partie fermée, réunion et intersection de parties ouvertes ou de parties fermées ; définition d'un point adhérent et d'un point intérieur ; intérieur, adhérence et frontière d'une partie.
  La caractérisation séquentielle des fermés a été vue en exercices ; La propriété parlant des images réciproques d'un fermé ou d'un ouvert n'est pas au programme ! La notion de compact n'est pas au programme !

Remarque : La fin de ce chapitre (étude de la continuité des applications entre EVN) n'est pas au programme de cette semaine. Cette semaine, l'objectif est surtout de vérifier que les définitions de topologie sont connues.

Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 5 points suivants, traités en cours ou en exercices.

1. Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Démontrer que $x \mapsto N(x)$ est lipschitzienne de (E, N) dans $(\mathbb{R}, |.|)$.
2. Enoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
3. Dessiner, en le justifiant, les boules unités fermées de $\mathbb{R}^2$ relativement aux normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$.
4. Si $x \in \mathbb{K}^n$, savoir comparer (en le justifiant !) $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ et $\|x\|_\infty$.
5. Comparer les normes $\| \,.\, \|_1$ et $\| \,.\, \|_\infty$ sur $\mathcal{C}^0\left([0,1], \mathbb{R}\right)$. Existe-il est inégalités dans « les deux sens » ?
6. Toute boule ouverte est un ouvert.
7. Nature topologique d'une union quelconque d'ouverts, ou d'une intersection finie d'ouverts.
8. Soient (E, N) un evn de dimension finie, et A une partie de E. Démontrer que si toute suite convergente d'éléments de A a sa limite dans A, alors, A est fermée.
9. Soient (E, N) un EVN de dimension finie et $x_0 \in E$. Prouver que $\{x_0\}$ est un fermé de E.
10. L'expression $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}\left({}^tA \times B\right)$ permet de définir un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Et la semaine suivante ?

EVN de dimension finie (en entier)