Programme de khôlle N°8 - Mathématiques - PC2

Semaine du 19/11/2018 au 23/11/2018

Intégration sur un intervalle quelconque

- Rappels sur les fonctions continues par morceaux.
- Définition d'une intégrale impropre convergente (cas des intervalles $[a,b[$, $]a,b]$ et $]a,b[$).
- Le cas des fonctions à valeurs complexes.
- Exemples fondamentaux : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}dt$, $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}dt$.
- Intégrales de fonctions positives : relations entre la convergence ou la divergence des intégrales de f et g dans le cas où $f \leq g$, $f = O(g)$ et $f \sim g$.
- Convergence absolue.
- Fonctions intégrables.
- Propriétés des fonctions intégrables (nullité de l'intégrale, Relation de Chasles, inégalité de la moyenne)
- Changement de variable ; intégration par parties (avec des précautions !)
- Comparaison séries-intégrales

Généralités sur les espaces vectoriels normés

- Définition d'une norme ; normes euclidiennes, distances.
- Boules, sphères, parties bornées.
- Normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$.
- Normes usuelles sur les espaces de fonctions : $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$. La norme $\|.\|_1$ a été vue, mais n'est pas au programme de PC.
- Applications k-lipschitziennes.
- Suites bornées, suites convergentes.

Remarque : La notion de « Normes équivalentes » n'est plus au programme, ce qui n'empêche pas d'essayer de comparer des normes avec des inégalités.

Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 5 points suivants, traités en cours ou en exercices.

1. Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ est convergente.
2. Rappeler la définition de la fonction Γ et déterminer son domaine de définition.
3. Enoncer et démontrer le lien entre $\Gamma(x)$ et $\Gamma(x+1)$ pour $x \in D_\Gamma$.
4. Enoncer les formules trigonométriques $\cos(p) \pm \cos(q) = ...$, $\sin(p) \pm \sin(q) = ...$
5. CNS sur $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ pour que $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix}$ soit diagonalisable.
6. Soit (E,N) un espace vectoriel normé. Démontrer que $x \mapsto N(x)$ est lipschitzienne de (E,N) dans $(\mathbb{R}, |.|)$.
7. Enoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
8. Dessiner, en le justifiant, les boules unités fermées de $\mathbb{R}^2$ relativement aux normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$.
9. Si $x \in \mathbb{K}^n$, savoir comparer (en le justifiant !) $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ et $\|x\|_\infty$.
10. Comparer les normes $\| \,.\, \|_1$ et $\| \,.\, \|_\infty$ sur $\mathcal{C}^0\left([0,1],\mathbb{R}\right)$. Existe-il est inégalités dans « les deux sens » ?

Et la semaine suivante ?

EVN de dimension finie