Programme de khôlle N°8 - Mathématiques - PC2

Semaine du 20/11/2017 au 24/11/2017

Probabilités

- Ensembles dénombrables
- Vocabulaire des probabilités : épreuve, univers (fini ou dénombrable), événement, tribu, probabilité.
- Théorème de continuité croissante, théorème de continuité décroissante
- Probabilité conditionnelle
- Formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes
- Indépendance d'événements

Intégration sur un intervalle quelconque

- Fonctions continues par morceaux.
- Définition d'une intégrale impropre convergente (cas des intervalles $[a, b[$, $]a, b]$ et $]a, b[$).
- Le cas des fonctions à valeurs complexes.
- Exemples fondamentaux : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$, $\displaystyle\int_0^1 \ln(t) dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$.
- Intégrales de fonctions positives : relations entre la convergence ou la divergence des intégrales de f et g dans le cas où $f \leq g$, $f = O(g)$ et $f \sim g$.
- Convergence absolue.
- Fonctions intégrables.
- Propriétés des fonctions intégrables (nullité de l'intégrale, Relation de Chasles, inégalité de la moyenne)
- Changement de variable ; intégration par parties.
- Comparaison séries-intégrales.

Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 10 points suivants, traités en cours ou en exercices.

1. Démontrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable.
2. Enoncer la formule du Crible (formule hors-programme !)
3. Enoncer la formule des probabilités totales, la formule des probabilités composées et la formule de Bayes.
4. Soient A et B deux événements. A et B sont indépendants si et seulement si $\overline{A}$ et B le sont.
5. Proposer deux méthodes pour calculer l'inverse de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.
6. Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente.
7. La quantité $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t}$ existe si et seulement si $\alpha > 0$.
8. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$, et dans ce cas, cette intégrale vaut $\frac{1}{\alpha-1}$.
9. Prouver la convergence et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} \sin(t) dt$.
10. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t \ln^\beta(t)} dt$ est-elle convergente ?

Et la semaine suivante ?

Espaces vectoriels normés