

Programme de khôlle N°8 - Mathématiques - PC2

Semaine du 15/11/2021 au 19/11/2021

Probabilités

- Ensembles dénombrables
- Vocabulaire des probabilités : épreuve, univers (fini ou dénombrable), événement, tribu, probabilité.
- Théorème de continuité croissante, théorème de continuité décroissante
- Probabilité conditionnelle
- Formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes
- Indépendance d'événements

Intégration sur un intervalle quelconque

- Fonctions continues par morceaux.
- Définition d'une intégrale impropre convergente (cas des intervalles $[a, b[$, $]a, b]$ et $]a, b[$).
- Le cas des fonctions à valeurs complexes.
- Exemples fondamentaux : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$, $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$, $\int_0^1 \ln(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$.
- Intégrales de fonctions positives : relations entre la convergence ou la divergence des intégrales de f et g dans le cas où $f \leq g$, $f = O(g)$ et $f \sim g$.
- Convergence absolue.
- Fonctions intégrables.
- Propriétés des fonctions intégrables (nullité de l'intégrale, Relation de Chasles, inégalité de la moyenne)
- Changement de variable ; intégration par parties.
- Comparaison séries-intégrales.



Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 10 points suivants, traités en cours ou en exercices.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que sur chaque colonne, la somme des coefficients vaut 1. Prouver que $1 \in \text{Sp}(A)$.
2. Démontrer que \mathbb{Z} est dénombrable.
3. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k}$
4. Enoncer la formule du Crible (formule hors-programme!)
5. Soient A et B deux événements. A et B sont indépendants si et seulement si \bar{A} et B le sont.
6. Démontrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente.
7. Prouver que la quantité $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ existe si et seulement si $\alpha > 0$.
8. Pour tout $x > 0$, trouver une relation entre $\Gamma(x)$ et $\Gamma(x+1)$.
9. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$, et dans ce cas, cette intégrale vaut $\frac{1}{\alpha-1}$.
10. Démontrer, par un simple argument d'encadrement, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x^3} dx = 0$.



Et la semaine suivante ?

Début des EVN