Programme de khôlle N°8 - Mathématiques - PC2

Semaine du 18/11/2024 au 22/11/2024

Intégration sur un intervalle quelconque

- Fonctions continues par morceaux.
- Définition d'une intégrale impropre convergente (cas des intervalles $[a, b[$, $]a, b]$ et $]a, b[$).
- Le cas des fonctions à valeurs complexes.
- Exemples fondamentaux : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$, $\displaystyle\int_0^1 \ln(t) dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$.
- Intégrales de fonctions positives : relations entre la convergence ou la divergence des intégrales de f et g dans le cas où $f \leq g$, $f = O(g)$ et $f \sim g$.
- Convergence absolue.
- Fonctions intégrables.
- Propriétés des fonctions intégrables (nullité de l'intégrale, Relation de Chasles, inégalité de la moyenne)
- Changement de variable ; intégration par parties (avec des précautions !)
- Comparaison séries-intégrales (il n'y a aucun résultat au programme : l'idée est de savoir le faire sur des exemples !)

Généralités sur les espaces vectoriels normés (début)

- Définition d'une norme ; normes euclidiennes, distances.
- Boules, sphères, parties bornées.
- Normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$.

Remarque : à cause du 11 novembre férié, peu d'exercices ont été traités ! On pourra pour l'instant se concentrer sur des applications directes du cours...

Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 10 points suivants, traités en cours ou en exercices.

1. Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente.
2. Rappeler la définition de la fonction Γ et déterminer son domaine de définition.
3. Enoncer et démontrer le lien entre $\Gamma(x)$ et $\Gamma(x+1)$ pour $x \in D_\Gamma$.
4. Enoncer et démontrer la condition nécessaire et suffisante pour la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$.
5. Enoncer et démontrer la condition nécessaire et suffisante pour la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$.
6. Enoncer et démontrer les identités de polarisation.
7. Enoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
8. Dessiner, en le justifiant, les boules unités fermées de $\mathbb{R}^2$ relativement aux normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$.
9. Démontrer qu'une boule (fermée ou ouverte) d'un EVN est un ensemble convexe.
10. Démontrer que : $\forall (x, y) \in E^2$, $|N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$.

Et la semaine suivante ?

EVN (la suite !)