# Programme de khôlle N°6 - Mathématiques - PC2

## Semaine du 18/10/2021 au 22/10/2021

---

### Réduction des endomorphismes

- Sous-espaces stables ; polynômes d'endomorphismes
- Définition des éléments propres d'un endomorphisme ; vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes.
- Polynôme caractéristique d'un endomorphisme : définition, coefficients remarquables, inégalité entre la multiplicité d'une racine de $\chi_u$ et la dimension de $E_\lambda(u)$.
- Définition d'un endomorphisme diagonalisable en dimension finie : les sous-espaces propres sont supplémentaires dans $E$.
- Caractérisations d'un endomorphisme diagonalisable : Il existe une base de $E$ constituée de vecteurs propres de $u$ ; il existe une base de $E$ dans laquelle la matrice de $u$ est diagonale ; la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de $E$ ;
- Avec le polynôme caractéristique : Si $\chi_u$ est scindé et à racines simples, alors, $u$ est diagonalisable ; CNS en rajoutant en argument sur la multiplicité des valeurs propres.
- Endomorphisme trigonalisable : définition ; caractérisation à l'aide du polynôme caractéristique.

### Réduction des matrices

- Elements propres d'une matrice : ce sont ceux de l'endomorphisme canoniquement associé.
- Matrice carrées diagonalisables.
- Le cas des matrices symétriques réelles.
- Trigonalisation d'une matrice carrée (avec indications)

**Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 10 points suivants, traités en cours ou en exercices.**

1. Démontrer que si les endomorphismes $u$ et $v$ commutent, alors $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont stables par $v$.
2. Si $P$ est annulateur de $u$, alors, $\mathrm{Sp}(u)$ est inclus dans l'ensemble des racines de $P$.
3. Démontrer que si $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont deux valeurs propres distinctes de $u \in \mathcal{L}(E)$, alors, la somme $E_{\lambda_1}(u) + E_{\lambda_2}(u)$ est directe.
4. Soient $E$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $u \in \mathrm{GL}(E)$. Comparer $\chi_u$ et $\chi_{u^{-1}}$.
5. Démontrer que deux matrices semblables (respectivement transposées) ont même polynôme caractéristique.
6. Donner un exemple d'une matrice symétrique non diagonalisable.
7. Trouver toutes les matrices diagonales $M$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = \mathrm{Diag}\,(1, 2, 3)$.
8. Donner une CNS de diagonalisabilité d'une matrice $A$ possédant une unique valeur propre.
9. Enoncer les formules trigonométriques $\cos(p) \pm \cos(q)$ et $\sin(p) \pm \sin(q)$.
10. Qui sont les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ ? Et ceux de $\mathbb{C}[X]$. Décomposer $X^3 - 1$ comme produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$, puis comme produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$.

Et après les vacances de la Toussaint ?

Probabilités