Programme de khôlle N°6 - Mathématiques - PC2

Semaine du 6/11/2017 au 10/11/2017

Réduction des endomorphismes

- Sous-espaces stables ; polynômes d'endomorphismes
- Définition des éléments propres d'un endomorphisme ; vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes.
- Polynôme caractéristique d'un endomorphisme : définition, coefficients remarquables, inégalité entre la multiplicité d'une racine de χ_u et la dimension de $E_\lambda(u)$.
- Définition d'un endomorphisme diagonalisable en dimension finie : les sous-espaces propres sont supplémentaires dans E.
- Caractérisations d'un endomorphisme diagonalisable : Il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u ; il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale ; la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de E ;
- Avec le polynôme caractéristique : Si χ_u est scindé et à racines simples, alors, u est diagonalisable ; CNS en rajoutant en argument sur la multiplicité des valeurs propres.
- Endomorphisme trigonalisable : définition ; caractérisation à l'aide du polynôme caractéristique.

Réduction des matrices

- Elements propres d'une matrice : ce sont ceux de l'endomorphisme canoniquement associé.
- Matrice carrées diagonalisables.
- Le cas des matrices symétriques réelles.
- Trigonalisation d'une matrice carrée (avec indications)

Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 10 points suivants, traités en cours ou en exercices.

1. Démontrer que si les endomorphismes u et v commutent, alors $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont stables par v.
2. Si P est annulateur de u, alors, $\mathrm{Sp}(u)$ est inclus dans l'ensemble des racines de P.
3. Déterminer les éléments propres de $u : f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \longmapsto f^{'} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
4. Démontrer que si λ_1 et λ_2 sont deux valeurs propres distinctes de $u \in \mathcal{L}(E)$, alors, la somme $E_{\lambda_1}(u) + E_{\lambda_2}(u)$ est directe.
5. Enoncer 5 conditions qui entrainent qu'un endomorphisme est diagonalisable.
6. Expliquer pourquoi un projecteur est diagonalisable.
7. Donner un exemple d'une matrice symétrique complexe qui n'est pas diagonalisable.
8. Démontrer que deux matrices semblables ont même trace, même déterminant, même polynôme caractéristique et même spectre.
9. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice ayant une unique valeur propre. Déterminer une CNS pour que A soit diagonalisable.
10. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable. Expliquer pourquoi la matrice $B = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$ est diagonalisable.

Et la semaine suivante ?

Probabilités