Programme de khôlle N°6 - Mathématiques - PC2

Semaine du 6/11/2023 au 10/11/2023

Réduction des endomorphismes

Il s'agit du programme précédent !

Réduction des matrices

- Elements propres d'une matrice : ce sont ceux de l'endomorphisme canoniquement associé.
- Matrice carrées diagonalisables.
- Le cas des matrices symétriques réelles.
- Trigonalisation d'une matrice carrée (avec indications)

Probabilités

- Ensembles dénombrables
- Vocabulaire des probabilités : épreuve, univers (fini ou dénombrable), événement, tribu, probabilité.
- Théorème de continuité croissante, théorème de continuité décroissante
- Probabilité conditionnelle
- Formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes
- Indépendance d'événements

Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 5 points suivants, traités en cours ou en exercices.

1. Démontrer que si les endomorphismes u et v commutent, alors $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont stables par v.
2. Si P est annulateur de u, alors, $\mathrm{Sp}(u)$ est inclus dans l'ensemble des racines de P.
3. Démontrer que si λ_1 et λ_2 sont deux valeurs propres distinctes de $u \in \mathcal{L}(E)$, alors, la somme $E_{\lambda_1}(u) + E_{\lambda_2}(u)$ est directe.
4. Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $u \in \mathrm{GL}(E)$. Comparer χ_u et $\chi_{u^{-1}}$.
5. Démontrer que deux matrices semblables (respectivement transposées) ont même polynôme caractéristique.
6. Donner un exemple d'une matrice symétrique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ qui n'est pas diagonalisable.
7. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice qui possède une unique valeur propre. Enoncer et démontrer une condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable.
8. Utilisation de Cayley-Hamilton pour calculer A^n où $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$.
9. Utilisation de Cayley-Hamilton pour calculer la matrice inverse de $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
10. Lien entre les valeurs propres de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et celles de $N = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ M & 0 \end{bmatrix}$ sans utiliser aucun polynôme caractéristique.

Et la semaine suivante ?

Début des intégrales généralisées