Programme de khôlle N°5 - Mathématiques - PC2

Semaine du 16/10/2017 au 20/10/2017

Déterminants

PROGRAMME PRÉCÉDENT !

Réduction des endomorphismes

- Sous-espaces stables ; polynômes d'endomorphismes
- Définition des éléments propres d'un endomorphisme ; vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes.
- Polynôme caractéristique d'un endomorphisme : définition, coefficients remarquables, inégalité entre la multiplicité d'une racine de χ_u et la dimension de $E_\lambda(u)$.
- Définition d'un endomorphisme diagonalisable en dimension finie : les sous-espaces propres sont supplémentaires dans E.
- Caractérisations d'un endomorphisme diagonalisable : Il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u ; il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale ; la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de E ;
- Avec le polynôme caractéristique : Si χ_u est scindé et à racines simples, alors, u est diagonalisable ; CNS en rajoutant en argument sur la multiplicité des valeurs propres.
- Endomorphisme trigonalisable : définition ; caractérisation à l'aide du polynôme caractéristique.

Remarque : **Pas de réduction de matrices pour l'instant !**

Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 10 points suivants, traités en cours ou en exercices.

1. Démontrer que $\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\right) = \det(AD - CB)$ où $(A, B, C, D) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^3$ avec $AC = CA$.
2. Donner la définition d'un déterminant de Vandermonde, son expression, et un plan de la démonstration permettant de l'obtenir.
3. Calculer le déterminant de la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf peut-être ceux situés sur la diagonale $\left[\cdot^{\cdot^{\cdot}}\right]$ et qui valent $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
4. Que peut-on dire d'une forme linéaire φ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui vérifie $\varphi(AB) = \varphi(BA)$ pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?
5. Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$. Démontrer que la fonction $x \mapsto \det(A + xB)$ est polynomiale de degré inférieur ou égal à n.
6. Démontrer que si les endomorphismes u et v commutent, alors $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont stables par v.
7. Si P est annulateur de u, alors, $\mathrm{Sp}(u)$ est inclus dans l'ensemble des racines de P.
8. Déterminer les éléments propres de $u : f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \longmapsto f' \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
9. Démontrer que si λ_1 et λ_2 sont deux valeurs propres distinctes de $u \in \mathcal{L}(E)$, alors, la somme $E_{\lambda_1}(u) + E_{\lambda_2}(u)$ est directe.
10. Enoncer 5 conditions qui entrainent qu'un endomorphisme est diagonalisable.

Et après les vacances de la Toussaint ?

Réduction des endomorphismes (en entier !)