Programme de khôlle N°5 - Mathématiques - PC2

Semaine du 14/10/2024 au 18/10/2024

Déterminants

Il s'agit du programme précédent !

Réduction des endomorphismes

- Sous-espaces stables ; polynômes d'endomorphismes
- Définition des éléments propres d'un endomorphisme ; vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes.
- Polynôme caractéristique d'un endomorphisme : définition, coefficients remarquables, inégalité entre la multiplicité d'une racine de χ_u et la dimension de $E_\lambda(u)$.
- Définition d'un endomorphisme diagonalisable en dimension finie : les sous-espaces propres sont supplémentaires dans E.
- Caractérisations d'un endomorphisme diagonalisable : Il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u ; il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale ; la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de E ;
- Avec le polynôme caractéristique : Si χ_u est scindé et à racines simples, alors, u est diagonalisable ; CNS en rajoutant en argument sur la multiplicité des valeurs propres.
- Polynômes annulateurs ; CNS de diagonalisabilité avec un polynôme annulateur scindé et à racines simples ; Théorème de Cayley-Hamilton.
- Endomorphisme trigonalisable : définition ; caractérisation à l'aide du polynôme caractéristique.

Réduction des matrices

- Elements propres d'une matrice : ce sont ceux de l'endomorphisme canoniquement associé.
- Matrice carrées diagonalisables.
- Le cas des matrices symétriques réelles.
- Trigonalisation d'une matrice carrée (avec indications)

Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 10 points suivants, traités en cours ou en exercices.

1. Soit $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ telle que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$. Démontrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}^3$ tel que $\mathcal{B} = \left(a, f(a), f^2(a)\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, puis écrire la matrice de f dans $\mathcal{B}$.
2. Calculer le déterminant de l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & M^\top \end{array}$.
3. Démontrer que $\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\right) = \det(AD - CB)$ où $(A, B, C, D) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^3$ avec $AC = CA$.
4. Donner la définition d'un déterminant de Vandermonde, son expression, et un plan de la démonstration permettant de l'obtenir.
5. Calculer le déterminant de la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf peut-être ceux situés sur la diagonale $\left[\cdot^{\cdot^{\cdot}}\right]$ et qui valent $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
6. Démontrer que si les endomorphismes u et v commutent, alors $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont stables par v.
7. Démontrer que si λ_1 et λ_2 sont deux valeurs propres distinctes de $u \in \mathcal{L}(E)$, alors, la somme $E_{\lambda_1}(u) + E_{\lambda_2}(u)$ est directe.
8. Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $u \in \mathrm{GL}(E)$. Comparer χ_u et $\chi_{u^{-1}}$.
9. Démontrer que deux matrices semblables (respectivement transposées) ont même polynôme caractéristique.
10. Donner un exemple d'une matrice symétrique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ qui n'est pas diagonalisable.

Et après les vacances ?

Probabilités