Programme de khôlle N°5 - Mathématiques - PC2

Semaine du 11/10/2021 au 15/10/2021

Déterminants

Il s'agit du programme précédent !

Réduction des endomorphismes

- Sous-espaces stables ; polynômes d'endomorphismes
- Définition des éléments propres d'un endomorphisme ; vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes.
- Polynôme caractéristique d'un endomorphisme : définition, coefficients remarquables, inégalité entre la multiplicité d'une racine de χ_u et la dimension de $E_\lambda(u)$.
- Définition d'un endomorphisme diagonalisable en dimension finie : les sous-espaces propres sont supplémentaires dans E.
- Caractérisations d'un endomorphisme diagonalisable : Il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u ; il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale ; la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de E ;
- Avec le polynôme caractéristique : Si χ_u est scindé et à racines simples, alors, u est diagonalisable ; CNS en rajoutant en argument sur la multiplicité des valeurs propres.
- Endomorphisme trigonalisable : définition ; caractérisation à l'aide du polynôme caractéristique.

Pas de réduction de matrices pour l'instant !

Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 10 points suivants, traités en cours ou en exercices.

1. Calculer le déterminant de l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & {}^tM \end{array}$.
2. Démontrer que $\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\right) = \det(AD - CB)$ où $(A, B, C, D) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^3$ avec $AC = CA$.
3. Donner la définition d'un déterminant de Vandermonde, son expression, et un plan de la démonstration permettant de l'obtenir.
4. Calculer le déterminant de la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf peut-être ceux situés sur la diagonale $\left[\,\iddots\,\right]$ et qui valent $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
5. Soit $U = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Déterminer une base de $H = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \, , \, \mathrm{Tr}(UM) = 0\}$.
6. Démontrer que si les endomorphismes u et v commutent, alors $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont stables par v.
7. Si P est annulateur de u, alors, $\mathrm{Sp}(u)$ est inclus dans l'ensemble des racines de P.
8. Démontrer que si λ_1 et λ_2 sont deux valeurs propres distinctes de $u \in \mathcal{L}(E)$, alors, la somme $E_{\lambda_1}(u) + E_{\lambda_2}(u)$ est directe.
9. Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $u \in \mathrm{GL}(E)$. Comparer χ_u et $\chi_{u^{-1}}$.
10. Démontrer que deux matrices semblables (respectivement transposées) ont même polynôme caractéristique.

Et la semaine prochaine ?

Réduction des matrices