# Programme de khôlle N°4 - Mathématiques - PC2

## Semaine du 08/10/2018 au 12/10/2018

---

### Rappels et compléments sur les matrices

- Les espaces vectoriels $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ : structure, base canonique, éléments inversibles, transposition, calcul par blocs.
- Matrices et applications linéaires
- Changement de bases
- Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice
- Systèmes d'équations linéaires
- Trace d'une matrice et d'un endomorphisme

### Déterminants

- Déterminant d'une matrice carrée : c'est l'unique application $f$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$, antisymétrique par rapport aux colonnes, linéaire par rapport à chacune des colonnes et telle que $f(I_n) = 1$. Développement par rapport à une ligne ou à une colonne ; déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.
- Déterminants de $n$ vecteurs ; caractérisation des bases.
- Déterminant d'un endomorphisme.
- Déterminants de Vandermonde.

**Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 5 points suivants, traités en cours ou en exercices.**

1. Démontrer que la trace d'un projecteur est égale à son rang.
2. Soient $A$ et $B$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Démontrer que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
3. Démontrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.
4. Déterminer une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ pour $n \in [\![1, 4]\!]$. Dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ dans le cas général ?
5. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer $AE_{ij}$ et $E_{ij}A$.
6. Calculer le déterminant de l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & \mathrm{Tr}(M)I_2 - M \end{array}$.
7. Calculer le déterminant de l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & {}^tM \end{array}$.
8. Démontrer que $\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\right) = \det(AD - CB)$ où $(A, B, C, D) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^3$ avec $AC = CA$.
9. Donner la définition d'un déterminant de Vandermonde, son expression, et un plan de la démonstration permettant de l'obtenir.
10. Calculer le déterminant de la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf peut-être ceux situés sur la diagonale $\left[\,\cdot^{\cdot^{\cdot}}\right]$ et qui valent $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Et la semaine prochaine ?

Début de la réduction