Programme de khôlle N°4 - Mathématiques - PC2

Semaine du 7/10/2024 au 11/10/2024

Rappels et compléments sur les matrices

- Les espaces vectoriels $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: structure, base canonique, éléments inversibles, transposition, calcul par blocs.
- Matrices et applications linéaires
- Changement de bases
- Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice
- Systèmes d'équations linéaires
- Trace d'une matrice et d'un endomorphisme

Déterminants

- Déterminant d'une matrice carrée. Développement par rapport à une ligne ou à une colonne ; déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.
- Déterminants de n vecteurs ; caractérisation des bases.
- Déterminant d'un endomorphisme.
- Déterminants de Vandermonde.

Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 10 points suivants, traités en cours ou en exercices.

1. Démontrer que la trace d'un projecteur est égale à son rang.
2. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Démontrer que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
3. Démontrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.
4. Calculer la trace de l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & \mathrm{Tr}(M)I_3 - M \end{array}$.
5. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer AE_{ij} et $E_{ij}A$.
6. Soit $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ telle que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$. Démontrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}^3$ tel que $\mathcal{B} = \left(a, f(a), f^2(a)\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, puis écrire la matrice de f dans $\mathcal{B}$.
7. Calculer le déterminant de l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & M^{\intercal} \end{array}$.
8. Démontrer que $\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\right) = \det(AD - CB)$ où $(A, B, C, D) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^3$ avec $AC = CA$.
9. Donner la définition d'un déterminant de Vandermonde, son expression, et un plan de la démonstration permettant de l'obtenir.
10. Calculer le déterminant de la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf peut-être ceux situés sur la diagonale $\left[\cdot^{\cdot^{\cdot}}\right]$ et qui valent $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Et la semaine prochaine ?

Début de la réduction