Programme de khôlle N°4 - Mathématiques - PC2

Semaine du 9/10/2017 au 13/10/2017

Rappels et compléments sur les matrices

- Les espaces vectoriels $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: structure, base canonique, éléments inversibles, transposition, calcul par blocs.
- Matrices et applications linéaires
- Changement de bases
- Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice
- Systèmes d'équations linéaires
- Trace d'une matrice et d'un endomorphisme

Déterminants

- Déterminant d'une matrice carrée : c'est l'unique application f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$, antisymétrique par rapport aux colonnes, linéaire par rapport à chacune des colonnes et telle que $f(I_n) = 1$. Développement par rapport à une ligne ou à une colonne ; déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.
- Déterminants de n vecteurs ; caractérisation des bases.
- Déterminant d'un endomorphisme.
- Déterminants de Vandermonde.

Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 10 points suivants, traités en cours ou en exercices.

1. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Démontrer que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Calculer la trace de l'application $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \longmapsto AX$.
3. Si E est de dimension finie et si p est un projecteur de E, alors, $\mathrm{rg}(p) = \mathrm{Tr}(p)$.
4. Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{rg}(M) = 1$. Démontrer qu'il existe $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ et $L \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ telles que $M = CL$.
5. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice vérifiant : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $|a_{ii}| > \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$. Montrer que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
6. Démontrer que $\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\right) = \det(AD - CB)$ où $(A, B, C, D) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^3$ avec $AC = CA$.
7. Donner la définition d'un déterminant de Vandermonde, son expression, et un plan de la démonstration permettant de l'obtenir.
8. Calculer le déterminant de la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf peut-être ceux situés sur la diagonale $\left[\cdot^{\cdot^{\cdot}}\right]$ et qui valent $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
9. Que peut-on dire d'une forme linéaire φ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui vérifie $\varphi(AB) = \varphi(BA)$ pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?
10. Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$. Démontrer que la fonction $x \mapsto \det(A + xB)$ est polynomiale de degré inférieur ou égal à n.

Et la semaine prochaine ?

Réduction des endomorphismes (début)