

Programme de khôlle N°3 - Mathématiques - PC2

Semaine du 30/09/2024 au 4/10/2024

Révisions sur les espaces vectoriels en dimension finie ou quelconque

Il s'agit du programme précédent !

Rappels et compléments sur les matrices

- Les espaces vectoriels $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: structure, base canonique, éléments inversibles, transposition, calcul par blocs.
- Matrices et applications linéaires
- Changement de bases
- Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice
- Systèmes d'équations linéaires
- Trace d'une matrice et d'un endomorphisme



Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 10 points suivants, traités en cours ou en exercices.

1. Soient E et F deux \mathbb{K} -ev, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Démontrer que f est injective si et seulement si $\text{Ker}(f) = \{0\}$, et que f est surjective si et seulement si $\text{Im}(f) = F$.
2. Soient F et G deux sev d'un \mathbb{K} -ev E . Démontrer que F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$. Démontrer que cette équivalence n'est plus vérifiée avec trois sev.
3. Donner la définition des polynômes de Lagrange et expliquer leur fonctionnement.
4. Soient E et F deux \mathbb{K} -ev de dim finies et $(f, g) \in (\mathcal{L}(E, F))^2$. On a : $\text{rg}(f + g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$.
5. Expliquer pourquoi $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.
6. Démontrer que la trace d'un projecteur est égale à son rang.
7. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Démontrer que $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.
8. Démontrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.
9. Calculer la trace de l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & \text{Tr}(M)I_3 - M \end{array}$.
10. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer AE_{ij} et $E_{ij}A$.



Et la semaine prochaine ?

Déterminants