Programme de khôlle N°3 - Mathématiques - PC2

Semaine du 01/10/2018 au 05/10/2018

Espaces vectoriels en dimension quelconque (Révisions !)

- Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels, sous-espaces engendrés par une partie.
- Applications linéaires : définition, propriétés, noyau, image, équations linéaires.
- Sommes et sommes directes d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels.
  Il y a ici une nouveauté : en première année, on n'étudie que la somme de 2 sev !
- Sous-espaces supplémentaires ; lien avec les projecteurs.

Espaces vectoriels en dimension finie (Révisions !)

- Familles libres, génératrices, bases.
- Existence de bases en dimension finie.
- Cardinaux des familles libres et génératrices.
- Dimension d'un espace, dimension et espaces isomorphes, dimension d'un produit d'espaces de dimension finie, dimension et sous-espaces vectoriels, dimension et sous-espaces supplémentaires, dimension et sommes directes.
- Rang d'une famille, d'une application linéaire.

Attention : La notion d'hyperplan n'est plus au programme !

Rappels et compléments sur les matrices

- Les espaces vectoriels $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: structure, base canonique, éléments inversibles, transposition, calcul par blocs.
- Matrices et applications linéaires
- Changement de bases
- Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice
- Systèmes d'équations linéaires
- Trace d'une matrice et d'un endomorphisme

Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 5 points suivants, traités en cours ou en exercices.

1. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Démontrer que f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$, et que f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.
2. Soient F et G deux sev d'un $\mathbb{K}$-ev E. Démontrer que F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$. Démontrer que cette équivalence n'est plus vérifiée avec trois sev.
3. Donner la définition des polynômes de Lagrange et expliquer leur fonctionnement.
4. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dim finies et $(f,g) \in (\mathcal{L}(E,F))^2$. On a : $\mathrm{rg}(f+g) \leq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.
5. Expliquer pourquoi $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.
6. Démontrer que la trace d'un projecteur est égale à son rang.
7. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Démontrer que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
8. Démontrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.
9. Déterminer une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ pour $n \in [\![1,4]\!]$. Dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ dans le cas général ?
10. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer AE_{ij} et $E_{ij}A$.

Et la semaine prochaine ?

Révisions sur les déterminants