Programme de khôlle N°3 - Mathématiques - PC2

Semaine du 02/10/2017 au 06/10/2017

Espaces vectoriels et applications linéaires

- Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels, sous-espaces engendrés par une partie.
- Applications linéaires : définition, propriétés, noyau, image, équations linéaires.
- Sommes et sommes directes d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels.
  Il y a ici une nouveauté : en première année, on n'étudie que la somme de 2 sev !
- Sous-espaces supplémentaires ; lien avec les projecteurs.
- Familles libres, génératrices, bases.
- Existence de bases en dimension finie.
- Cardinaux des familles libres et génératrices.
- Dimension d'un espace, dimension et espaces isomorphes, dimension d'un produit d'espaces de dimension finie, dimension et sous-espaces vectoriels, dimension et sous-espaces supplémentaires, dimension et sommes directes.
- Rang d'une famille, d'une application linéaire.
- Interpolation de Lagrange.

Rappels et compléments sur les matrices

- Les espaces vectoriels $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: structure, base canonique, éléments inversibles, transposition, calcul par blocs.
- Matrices et applications linéaires
- Changement de bases
- Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice
- Systèmes d'équations linéaires
- Trace d'une matrice et d'un endomorphisme

Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 10 points suivants, traités en cours ou en exercices.

1. Donner la définition des polynômes de Lagrange associés à des réels deux à deux distincts $a_0, \ldots, a_n$.
2. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Démontrer que f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$, et que f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.
3. Soit ϕ l'application qui à toute fonction f de $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ associe la fonction $\phi(f)$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ \phi(f)(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} f(t)dt$. Etudier l'injectivité et la surjectivité de ϕ.
4. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de même dimension n, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On a équivalence entre l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f.
5. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dim finies et $(f,g) \in (\mathcal{L}(E,F))^2$. On a : $\mathrm{rg}(f+g) \leq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.
6. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Démontrer que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
7. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Calculer la trace de l'application $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \longmapsto AX$.
8. Si E est de dimension finie et si p est un projecteur de E, alors, $\mathrm{rg}(p) = \mathrm{Tr}(p)$.
9. Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{rg}(M) = 1$. Démontrer qu'il existe $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ et $L \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ telles que $M = CL$.
10. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice vérifiant : $\forall i \in [\![1,n]\!],\ |a_{ii}| > \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$. Montrer que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Et la semaine prochaine ?

Déterminants