Programme de khôlle N°2 - Mathématiques - PC2

Semaine du 20/09/2021 au 24/09/2021

Suites et séries de réels et de complexes

Il s'agit du programme précédent !

Espaces vectoriels en dimension quelconque (Révisions !)

- Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels, sous-espaces engendrés par une partie.
- Applications linéaires : définition, propriétés, noyau, image, équations linéaires.
- Sommes et sommes directes d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels.
  Il y a ici une nouveauté : en première année, on n'étudie que la somme de 2 sev !
- Sous-espaces supplémentaires ; lien avec les projecteurs.

Espaces vectoriels en dimension finie (Révisions !)

- Familles libres, génératrices, bases.
- Existence de bases en dimension finie.
- Cardinaux des familles libres et génératrices.
- Dimension d'un espace, dimension et espaces isomorphes, dimension d'un produit d'espaces de dimension finie, dimension et sous-espaces vectoriels, dimension et sous-espaces supplémentaires, dimension et sommes directes.
- Rang d'une famille, d'une application linéaire.

Attention : La notion d'hyperplan n'est plus au programme !

Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 10 points suivants, traités en cours ou en exercices.

1. Donner un exemple de suites équivalentes (u_n) et (v_n) telles que (e^{u_n}) et (e^{v_n}) ne le sont pas. Idem avec $(\ln(u_n))$ et $(\ln(v_n))$.
2. Soit (u_n) une suite réelle telle que les trois suites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) soient convergentes. Démontrer que la suite (u_n) converge.
3. Expliquer, avec tous les détails, comment on étudie une suite arithmético-géométrique.
4. Etudier la convergence de la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \dfrac{1}{n^3} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lfloor k^2 x \rfloor$ où $x \in \mathbb{R}$.
5. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \dfrac{1}{n}$.
6. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Démontrer que f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$, et que f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.
7. Soient F et G deux sev d'un $\mathbb{K}$-ev E. Démontrer que F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$. Démontrer que cette équivalence n'est plus vérifiée avec trois sev.
8. Donner la définition des polynômes de Lagrange et expliquer leur fonctionnement.
9. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dim finies et $(f, g) \in (\mathcal{L}(E, F))^2$. On a : $\mathrm{rg}(f + g) \leq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.
10. Expliquer pourquoi $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.

Et la semaine prochaine ?

Matrices