Programme de khôlle N°2 - Mathématiques - PC2

Semaine du 25/09/2017 au 29/09/2017

Suites et séries de réels et de complexes

Il s'agit du programme précédent !

Espaces vectoriels et applications linéaires

- Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels, sous-espaces engendrés par une partie.
- Applications linéaires : définition, propriétés, noyau, image, équations linéaires.
- Sommes et sommes directes d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels.
  *Il y a ici une nouveauté : en première année, on n'étudie que la somme de **2** sev !*
- Sous-espaces supplémentaires ; lien avec les projecteurs.
- Familles libres, génératrices, bases.
- Existence de bases en dimension finie.
- Cardinaux des familles libres et génératrices.
- Dimension d'un espace, dimension et espaces isomorphes, dimension d'un produit d'espaces de dimension finie, dimension et sous-espaces vectoriels, dimension et sous-espaces supplémentaires, dimension et sommes directes.
- Rang d'une famille, d'une application linéaire.
- Interpolation de Lagrange.

Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 10 points suivants, traités en cours ou en exercices.

1. Donner un exemple de suites équivalentes (u_n) et (v_n) telles que (e^{u_n}) et (e^{v_n}) ne le sont pas. Idem avec $(\ln(u_n))$ et $(\ln(v_n))$.
2. Soit (u_n) une suite réelle telle que les trois suites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) soient convergentes.
   Démontrer que la suite (u_n) converge.
3. Expliquer, avec tous les détails, comment on étudie une suite arithmético-géométrique.
4. Etudier la convergence de la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \dfrac{1}{n^3} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} E(k^2 x)$ où $x \in \mathbb{R}$.
5. Démontrer la convergence de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ définie par : $\forall n \geq 1$, $a_n = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) - \ln(n)$.
6. Donner la définition des polynômes de Lagrange associés à des réels deux à deux distincts $a_0, \ldots, a_n$.
7. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Démontrer que f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$, et que f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.
8. Soit ϕ l'application qui à toute fonction f de $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ associe la fonction $\phi(f)$ définie par :
   $\forall x \in \mathbb{R}$, $\phi(f)(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} f(t)dt$. Etudier l'injectivité et la surjectivité de ϕ.
9. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de même dimension n, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a équivalence entre l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f.
10. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dim finies et $(f, g) \in (\mathcal{L}(E, F))^2$. On a : $\mathrm{rg}(f + g) \leq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.

Et la semaine prochaine ?

Matrices