

# Programme de khôlle N°2 - Mathématiques - PC2

Semaine du 25/09/2023 au 29/09/2023

---

## Suites et séries de réels et de complexes

*Il s'agit du programme précédent!*

## Espaces vectoriels en dimension quelconque (Révisions!)

- Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels, sous-espaces engendrés par une famille finie de vecteurs.
- Applications linéaires : définition, propriétés, noyau, image, équations linéaires.
- Sommes et sommes directes d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels.  
*Il y a ici une nouveauté : en première année, on n'étudie que la somme de 2 sev!*
- Sous-espaces supplémentaires ; lien avec les projecteurs.

## Espaces vectoriels en dimension finie (Révisions!)

- Familles libres, génératrices, bases.
- Existence de bases en dimension finie.
- Cardinaux des familles libres et génératrices.
- Dimension d'un espace, dimension et espaces isomorphes, dimension d'un produit d'espaces de dimension finie, dimension et sous-espaces vectoriels, dimension et sous-espaces supplémentaires, dimension et sommes directes.
- Rang d'une famille, d'une application linéaire.
- Hyperplans



**Si vous le souhaitez, vous pouvez interroger les étudiants pendant 5-10 minutes sur l'un des 5 points suivants, traités en cours ou en exercices.**

1. Donner un exemple de suites équivalentes  $(u_n)$  et  $(v_n)$  telles que  $(e^{u_n})$  et  $(e^{v_n})$  ne le sont pas. Idem avec  $(\ln(u_n))$  et  $(\ln(v_n))$ .
2. Soit  $(u_n)$  une suite réelle telle que les trois suites  $(u_{2n})$ ,  $(u_{2n+1})$  et  $(u_{3n})$  soient convergentes. Démontrer que la suite  $(u_n)$  converge.
3. Expliquer, avec tous les détails, comment on étudie une suite arithmético-géométrique.
4. Etudier la convergence de la suite  $(u_n)$  définie pour  $n \geq 1$  par  $u_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n [k^2 x]$  où  $x \in \mathbb{R}$ .
5. Démontrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$ .
6. Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev, et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Démontrer que  $f$  est injective si et seulement si  $\text{Ker}(f) = \{0\}$ , et que  $f$  est surjective si et seulement si  $\text{Im}(f) = F$ .
7. Soient  $F$  et  $G$  deux sev d'un  $\mathbb{K}$ -ev  $E$ . Démontrer que  $F$  et  $G$  sont en somme directe si et seulement si  $F \cap G = \{0\}$ . Démontrer que cette équivalence n'est plus vérifiée avec trois sev.
8. Donner la définition des polynômes de Lagrange et expliquer leur fonctionnement.
9. Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev de dim finies et  $(f, g) \in (\mathcal{L}(E, F))^2$ . On a :  $\text{rg}(f+g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$ .
10. Expliquer pourquoi  $\mathbb{K}[X]$  n'est pas de dimension finie.



Et la semaine prochaine ?

Matrices