

PC2 - DS N° 8 - Un corrigé de la version E3A

1 Rappelons que, pour tout réel t , on a $\text{ch}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ et $\text{sh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$. On peut alors écrire $\frac{\text{ch}(t)}{\frac{e^t}{2}} = 1 + e^{-2t}$ et $\frac{\text{sh}(t)}{\frac{e^t}{2}} = 1 - e^{-2t}$. On constate que chacune des fractions tend vers 1 lorsque t tend vers $+\infty$, de sorte que :

$$\text{ch}(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^t}{2}$$

$$\text{sh}(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^t}{2}$$

2 Les deux fonctions g_1 et g_2 sont dérivables sur $]0, +\infty[$ en tant que quotients de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, et on obtient, pour tout $t > 0$:

$$g_1'(t) = \frac{-\text{sh}(t)}{\text{ch}^2(t)} < 0$$

$$g_2'(t) = \frac{\text{sh}(t) - t\text{ch}(t)}{\text{sh}^2(t)}$$

La fonction g_1 est donc décroissante sur $]0, +\infty[$. Par ailleurs, la fonction $\Psi : t \mapsto \text{sh}(t) - t\text{ch}(t)$ a pour dérivée $t \mapsto -t\text{sh}(t)$ qui est négative sur $]0, +\infty[$. La fonction Ψ est donc décroissante sur $]0, +\infty[$ et puisque $\Psi(0) = 0$, on peut affirmer que Ψ est négative sur $]0, +\infty[$. La fonction g_2 est donc décroissante sur $]0, +\infty[$. Les limites de g_1 en 0 et en $+\infty$ s'obtiennent facilement. Enfin, l'équivalent classique $\text{sh}(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t$ permet d'affirmer que g_2 tend vers 1 en 0, et g_2 tend vers 0 en $+\infty$ par croissances comparées. En résumé :

t	0	$+\infty$
g_1	1	0

t	0	$+\infty$
g_2	1	0

3.a Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto t^n e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$. L'intégrale I_n est donc uniquement impropre en $+\infty$. On a $t^n e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, donc, par comparaisons d'intégrales de fonctions positives, on peut dire que l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ est convergente. Finalement :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ l'intégrale } I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt \text{ est convergente.}$$

3.b Soit $n \in \mathbb{N}$. Les fonctions $u : t \mapsto t^{n+1}$ et $v : t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe C^1 sur $[0, +\infty[$, et la limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ rend légitime une intégration par parties. On peut donc écrire :

$$I_{n+1} = \int_0^{+\infty} u(t)v'(t)dt = \underbrace{[-t^{n+1}e^{-t}]_0^{+\infty}}_{=0} + \int_0^{+\infty} (n+1)t^n e^{-t} dt$$

On obtient donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = (n+1)I_n$$

Une récurrence facile permet alors de trouver $I_n = n!I_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or, $I_0 = 1$ d'après le cours, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = n!$$

3.c Le changement de variable $u = \alpha t$ permet d'écrire :

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-\alpha t} dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{\alpha}\right)^n e^{-u} \frac{du}{\alpha} = \frac{1}{\alpha^{n+1}} I_n$$

En conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} t^n e^{-\alpha t} dt = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$$

4.a

Pour tout $t \geq 0$, on a $0 \leq e^{-t} \leq e^t$. En ajoutant e^t dans chaque membre puis en divisant par 2, on obtient :

$$\forall t \geq 0, \frac{e^t}{2} \leq \text{ch}(t) \leq e^t$$

4.b

Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto \frac{t^n}{\text{ch}(t)}$ est continue sur $[0, +\infty[$. L'intégrale C_n est donc seulement impropre en $+\infty$.

D'après la question précédente, on peut écrire, pour tout $t \geq 0$, l'inégalité $\frac{t^n}{\text{ch}(t)} \leq 2t^n e^{-t}$. Or, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ est convergente d'après la question **3.a**, donc, par comparaison d'intégrales de fonctions positives :

L'intégrale C_n est convergente.

La question précédente permet d'obtenir : $\forall t \geq 0, t^n e^{-t} \leq \frac{t^n}{\text{ch}(t)} \leq 2t^n e^{-t}$. En intégrant, cela fournit l'encadrement $I_n \leq C_n \leq 2I_n$, et puisque $I_n > 0$, on peut conclure :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq \frac{C_n}{I_n} \leq 2$$

4.c

La dérivée de la fonction $t \mapsto \text{Arctan}(e^t)$ est la fonction $t \mapsto \frac{e^t}{1 + e^{2t}}$. On déduit alors :

$$C_0 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\text{ch}(t)} dt = \int_0^{+\infty} \frac{2}{e^t + e^{-t}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{2e^t}{e^{2t} + 1} dt = [2\text{Arctan}(e^t)]_0^{+\infty} = 2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$$

Finalement :

$$C_0 = \frac{\pi}{2}$$

4.d

Soit $t > 0$. On peut écrire $\frac{1}{\text{ch}(t)} = \frac{2}{e^t + e^{-t}} = \frac{2}{e^t} \times \frac{1}{1 + e^{-2t}}$. Or, lorsque $t > 0$, on $0 < e^{-2t} < 1$, donc, le développement en série entière $\frac{1}{1+u} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u^k$, valable pour tout $u \in]-1, 1[$, permet d'écrire :

$$\frac{1}{\text{ch}(t)} = 2e^{-t} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (e^{-2t})^k = 2e^{-t} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k e^{-2kt}$$

Finalement :

$$\forall t > 0, \frac{1}{2\text{ch}(t)} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k e^{-(2k+1)t}$$

4.e

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On déduit de la question précédente que :

$$\forall t > 0, \frac{t^n}{\text{ch}(t)} = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^n e^{-(2k+1)t}$$

Remarquons que l'égalité est encore valable lorsque $t = 0$, de sorte que :

$$C_n = 2 \int_0^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^n e^{-(2k+1)t} \right) dt$$

Nous allons essayer d'utiliser un théorème d'intégration terme à terme. Considérons pour cela, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$f_k : \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \longmapsto & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (-1)^k t^n e^{-(2k+1)t} \end{array}$$

Chacune des fonctions f_k est continue (donc, continue par morceaux) sur $[0, +\infty[$, et intégrable d'après la question **3.c**. La série de fonctions $\sum f_k$ CVS sur $[0, +\infty[$ vers la fonction $t \mapsto \frac{t^n}{\text{ch}(t)}$ (qui est c-p-m) d'après la question **4.d**.

Enfin, on a $\int_0^{+\infty} |f_k(t)| dt = \frac{n!}{(2k+1)^{n+1}}$ et la série $\sum_{k \geq 0} \frac{n!}{(2k+1)^{n+1}}$ converge (rappelons que n est fixé dans $\mathbb{N}^*$) car son terme général est équivalent à $\frac{C}{k^{n+1}}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente. On peut donc intégrer terme à terme et écrire :

$$C_n = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \int_0^{+\infty} t^n e^{-(2k+1)t} dt = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{n!}{(2k+1)^{n+1}}$$

En conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, C_n = 2(n!) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{n+1}}$$

5.a Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto \frac{t^n}{\text{sh}(t)}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et prolongeable par continuité en 0 car $\text{sh}(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t$.

L'intégrale S_n est donc faussement impropre en 0. Par ailleurs, $\frac{t^n}{\text{sh}(t)} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2t^n}{e^t} = 2t^n e^{-t}$. Or, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ est convergente d'après la question **3.a**, donc, par comparaison d'intégrales de fonctions positives, on peut écrire :

L'intégrale S_n est convergente.

5.b Soit $t > 0$. On peut écrire $\frac{1}{\text{sh}(t)} = \frac{2}{e^t - e^{-t}} = \frac{2}{e^t} \times \frac{1}{1 - e^{-2t}}$. Or, lorsque $t > 0$, on $0 < e^{-2t} < 1$, donc, le développement en série entière $\frac{1}{1-u} = \sum_{k=0}^{+\infty} u^k$, valable pour tout $u \in]-1, 1[$, permet d'écrire :

$$\frac{1}{\text{sh}(t)} = 2e^{-t} \sum_{k=0}^{+\infty} (e^{-2t})^k = 2e^{-t} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-2kt}$$

Finalement :

$$\forall t > 0, \frac{1}{2\text{sh}(t)} = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-(2k+1)t}$$

5.c Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On déduit de la question précédente que :

$$\forall t > 0, \frac{t^n}{\text{sh}(t)} = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} t^n e^{-(2k+1)t}$$

Remarquons que l'égalité est encore valable lorsque $t = 0$, de sorte que :

$$S_n = 2 \int_0^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} t^n e^{-(2k+1)t} \right) dt$$

Nous allons essayer d'utiliser un théorème d'intégration terme à terme. Considérons pour cela, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$g_k : \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t^n e^{-(2k+1)t} \end{array}$$

Chacune des fonctions g_k est continue (donc, continue par morceaux) sur $[0, +\infty[$, et intégrable d'après la question **3.c**. La série de fonctions $\sum g_k$ CVS sur $[0, +\infty[$ vers la fonction $t \mapsto \frac{t^n}{\text{sh}(t)}$ (qui est c-p-m) d'après la question **5.b**.

Enfin, on a $\int_0^{+\infty} |g_k(t)| dt = \frac{n!}{(2k+1)^{n+1}}$ et la série $\sum_{k \geq 0} \frac{n!}{(2k+1)^{n+1}}$ converge (rappelons que n est fixé dans $\mathbb{N}^*$) car son terme général est équivalent à $\frac{C}{k^{n+1}}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente. On peut donc intégrer terme à terme et écrire :

$$S_n = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} t^n e^{-(2k+1)t} dt = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n!}{(2k+1)^{n+1}}$$

En conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = 2(n!) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^{n+1}}$$

5.d

On trouve :

$$S_1 = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = 2 \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} \right) = 2 \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \right)$$

En utilisant l'indication de l'énoncé, on obtient donc :

$$S_1 = \frac{\pi^2}{4}$$

6.aIntroduisons la fonction à deux variables f définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, t) & \longmapsto & \frac{e^{ixt}}{\text{ch}(t)} \end{array}$$

Vérifions les hypothèses du théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et intégrable grâce à $|f(x, t)| \leq \frac{1}{\text{ch}(t)}$.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{ite^{ixt}}{\text{ch}(t)}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{ite^{ixt}}{\text{ch}(t)}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
- Enfin, on peut écrire, pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$: $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{t}{\text{ch}(t)} = \varphi(t)$ où φ est positive, continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (car $\varphi(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} 2te^{-t}$).

On peut donc conclure que :

$$F \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{ite^{ixt}}{\text{ch}(t)} dt$$

6.bSoit $x \in]-1, 1[$. On peut écrire : $e^{ixt} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ixt)^n}{n!}$. On en déduit :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ixt)^n}{n! \text{ch}(t)} \right) dt$$

Nous allons à nouveau utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque.

Considérons pour cela, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$h_n : \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \longmapsto & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{(ixt)^n}{n! \text{ch}(t)} \end{array}$$

Chacune des fonctions h_n est continue (donc, continue par morceaux) sur $[0, +\infty[$, et intégrable d'après la question**4.b.** La série de fonctions $\sum h_n$ CVS sur $[0, +\infty[$ vers la fonction $t \mapsto \frac{(ixt)^n}{n! \text{ch}(t)}$ (qui est c-p-m) d'après ce qui précède.Enfin, on a $\int_0^{+\infty} |h_n(t)| dt = \frac{|x|^n}{n!} C_n$ et la série $\sum_{n \geq 0} \frac{|x|^n C_n}{n!}$ converge car :

$$\frac{|x|^n}{n!} C_n \underset{4.b}{\leq} \frac{|x|^n}{n!} \times 2I_n = 2|x|^n$$

et le terme majorant est le terme général d'une série géométrique convergente car $|x| < 1$. On peut donc intégrer terme à terme et écrire :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n}{n!} \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{\text{ch}(t)} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n}{n!} C_n$$

En conclusion :

$$\forall x \in]-1, 1[, F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n C_n}{n!} x^n$$

D'après cette égalité, le rayon de convergence R de ce développement est supérieur ou égal à 1. Par ailleurs, des inégalités $\left| \frac{i^n C_n}{n!} \right| \geq \frac{I_n}{n!} = 1$, on déduit que R est inférieur ou égal au rayon de convergence de $\sum x^n$ qui vaut 1. Finalement :

$$\boxed{R = 1}$$

6.c Soit $x \in \mathbb{R}$. Introduisons les fonctions $u : t \mapsto e^{ixt}$ et $v : t \mapsto \frac{1}{\text{ch}(t)}$ qui sont de classe C^1 . On a $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ (produit d'une fonction bornée par une fonction qui tend vers 0). Une intégration par parties est donc légitime et permet d'obtenir :

$$ixF(x) = \int_0^{+\infty} u'(t)v(t)dt = \left[\frac{e^{ixt}}{\text{ch}(t)} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt} \text{sh}(t)}{\text{ch}^2(t)} dt = -1 + \int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt} \text{sh}(t)}{\text{ch}^2(t)} dt$$

On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |xF(x)| \leq 1 + \int_0^{+\infty} \frac{|e^{ixt}| \text{sh}(t)}{\text{ch}^2(t)} dt$$

ce qui s'écrit encore :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |xF(x)| \leq 1 + \int_0^{+\infty} \frac{\text{sh}(t)}{\text{ch}^2(t)} dt$$

Le membre de droite est une constante M indépendante de x , donc, de l'inégalité $|F(x)| \leq \frac{M}{|x|}$, on déduit :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0}$$

7.a Soient $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. La question 4.d permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\text{ch}(t)} - \sum_{k=0}^n (-1)^k e^{-(2k+1)t} &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k e^{-(2k+1)t} - \sum_{k=0}^n (-1)^k e^{-(2k+1)t} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k e^{-(2k+1)t} \\ &= e^{-t} \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-e^{-2t})^k = e^{-t} (e^{-2t})^{n+1} \times \frac{1}{1 + e^{-2t}} = \frac{e^{-(2n+3)t}}{1 + e^{-2t}} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall t > 0, \left| \frac{1}{2\text{ch}(t)} - \sum_{k=0}^n (-1)^k e^{-(2k+1)t} \right| \leq e^{-(2n+3)t}}$$

7.b Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\Delta_n(x) = H(x) - \sum_{k=0}^n 2(-1)^k \left(\int_0^{+\infty} e^{-(2k+1)t} \cos(xt) dt \right)$. On obtient, puisque la somme est finie :

$$\begin{aligned} |\Delta_n(x)| &= \left| \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\text{ch}(t)} dt - \sum_{k=0}^n 2(-1)^k \left(\int_0^{+\infty} e^{-(2k+1)t} \cos(xt) dt \right) \right| \\ &= \left| \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{\text{ch}(t)} - \sum_{k=0}^n 2(-1)^k e^{-(2k+1)t} \right] \cos(xt) dt \right| \\ &\leq \int_0^{+\infty} \left| \frac{1}{\text{ch}(t)} - \sum_{k=0}^n 2(-1)^k e^{-(2k+1)t} \right| dt \end{aligned}$$

La question précédente permet alors de conclure :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \left| H(x) - \sum_{k=0}^n 2(-1)^k \left(\int_0^{+\infty} e^{-(2k+1)t} \cos(xt) dt \right) \right| \leq 2 \int_0^{+\infty} e^{-(2n+3)t} dt}$$

7.c

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$. Tout d'abord, la convergence de l'intégrale proposée est assurée par la majoration $|e^{-(2k+1)t} \cos(xt)| \leq e^{-(2k+1)t}$. Pour le calcul, on peut passer par les nombres complexes. On obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-(2k+1)t} \cos(xt) dt &= \operatorname{Re} \left(\int_0^{+\infty} e^{-(2k+1)t} e^{ixt} dt \right) = \operatorname{Re} \left(\int_0^{+\infty} e^{[-(2k+1)+ix]t} dt \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\left[\frac{e^{[-(2k+1)+ix]t}}{-(2k+1)+ix} \right]_0^{+\infty} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{-1}{-(2k+1)+ix} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{(2k+1)+ix}{x^2+(2k+1)^2} \right) \end{aligned}$$

En conclusion :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} e^{-(2k+1)t} \cos(xt) dt = \frac{2k+1}{x^2+(2k+1)^2}$$

7.d

Soit $x \in \mathbb{R}$. Compte tenu du calcul précédent, l'inégalité de la question **7.b** peut s'écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| H(x) - \sum_{k=0}^n 2(-1)^k \frac{2k+1}{x^2+(2k+1)^2} \right| \leq \frac{2}{2n+3}$$

En faisant alors tendre n vers $+\infty$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, H(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^k(2k+1)}{(2k+1)^2+x^2}$$

8

Il serait naturel ici d'écrire que les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions de la forme $t \mapsto Ae^t + Be^{-t}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$, mais aucune fonction hyperbolique n'intervient alors ! On remarque plutôt que les deux fonctions ch et sh sont solutions de l'équation $y'' = y$. Puisque l'espace vectoriel des solutions de cette équation différentielle est de dimension 2 d'après le cours, et puisque les deux fonctions ch et sh sont linéairement indépendantes, elles constituent une base de l'ensemble des solutions. En conclusion :

$$\text{Les solutions de } y'' = y \text{ sont les fonctions de la forme } t \mapsto A \operatorname{ch}(t) + B \operatorname{sh}(t) \text{ avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

9.a

L'équation homogène a été résolue dans la question précédente. Il s'agit donc maintenant de chercher une solution particulière de l'équation avec second membre. Cherchons une telle solution y sous la forme $y(t) = \operatorname{ch}(t)z(t)$ où z est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On obtient, pour tout réel t :

$$y'(t) = \operatorname{sh}(t)z(t) + \operatorname{ch}(t)z'(t) \qquad y''(t) = \operatorname{ch}(t)z(t) + 2\operatorname{sh}(t)z'(t) + \operatorname{ch}(t)z''(t)$$

On a alors les équivalences :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, y''(t) - y(t) &= \frac{1}{\operatorname{ch}(t)} \iff \forall t \in \mathbb{R}, 2\operatorname{sh}(t)z'(t) + \operatorname{ch}(t)z''(t) = \frac{1}{\operatorname{ch}(t)} \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, z''(t) + \frac{2\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}(t)}z'(t) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(t)} \\ &\iff \exists C \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, z'(t) = \frac{C}{\operatorname{ch}^2(t)} + \frac{t}{\operatorname{ch}^2(t)} \\ &\iff \exists (C, C') \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, z(t) = C \frac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}(t)} + t \frac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}(t)} - \ln(\operatorname{ch}(t)) + C' \\ &\iff \exists (C, C') \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = C \operatorname{sh}(t) + t \operatorname{sh}(t) - \operatorname{ch}(t) \ln(\operatorname{ch}(t)) + C' \operatorname{ch}(t) \end{aligned}$$

On trouve donc comme solution particulière la fonction $t \mapsto t \operatorname{sh}(t) - \operatorname{ch}(t) \ln(\operatorname{ch}(t))$ et on retrouve donc au passage l'ensemble des solutions de l'équation homogène de la forme $t \mapsto A \operatorname{ch}(t) + B \operatorname{sh}(t)$. Finalement :

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto A \operatorname{ch}(t) + B \operatorname{sh}(t) + t \operatorname{sh}(t) - \operatorname{ch}(t) \ln(\operatorname{ch}(t)) \end{array} \quad , (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

9.b

Supposons qu'il existe une fonction impaire f appartenant à $\mathcal{S}$. Il existerait donc $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = Ach(t) + Bsh(t) + tsh(t) - ch(t) \ln(ch(t))$$

On pourrait alors écrire :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(-t) = Ach(t) - Bsh(t) + tsh(t) - ch(t) \ln(ch(t))$$

et puisque f est impaire, on obtiendrait en additionnant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, 0 = 2Ach(t) + 2tsh(t) - 2ch(t) \ln(ch(t))$$

En prenant $t = 0$, on obtient $A = 0$, donc, $f - Bsh$ est une fonction impaire égale à $t \mapsto tsh(t) - ch(t) \ln(ch(t))$, qui est paire. Seule la fonction nulle pouvant être paire et impaire, on obtient donc une absurdité. Finalement :

S ne contient aucune fonction impaire

9.c

Il est facile de vérifier qu'une solution $t \mapsto Ach(t) + Bsh(t) + tsh(t) - ch(t) \ln(ch(t))$ est paire si et seulement si $B = 0$. Une telle fonction prend alors la valeur A en 0, donc :

L'unique fonction paire de S telle que $\theta(0) = 1$ est $t \mapsto ch(t) + tsh(t) - ch(t) \ln(ch(t))$

10.a

C'est une question de cours ! On a : $\forall t \in \mathbb{R}, ch(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!}$. On a donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}, a_k = \frac{1}{(2k)!}$$

10.b

La condition $a_0 b_0 = 1$ impose que $b_0 = 1$ (car $a_0 = 1$). Les termes de la suite sont alors déterminés de manière unique par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = - \sum_{k=0}^{n-1} b_k a_{n-k}$$

10.c

On trouve $b_1 = -b_0 a_1 = -\frac{1}{2}$ puis

$$b_2 = -b_0 a_2 - b_1 a_1 = -\frac{1}{24} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{24}$$

Finalement :

$b_0 = 1$

$b_1 = -\frac{1}{2}$

$b_2 = \frac{5}{24}$

10.d

Nous allons raisonner à l'aide d'une récurrence forte. On a bien $|b_0| \leq 1$. Supposons que $|b_k| \leq 1$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. La formule de la question **10.b** permet alors d'obtenir :

$$\begin{aligned} |b_{n+1}| &= \left| \sum_{k=0}^n b_k a_{n+1-k} \right| \leq \sum_{k=0}^n |b_k| a_{n+1-k} \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2(n+1-k))!} \\ &= \sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{(2p)!} \leq \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)!} = ch(1) - 1 \leq 1 \end{aligned}$$

L'assertion est donc vraie au rang $n+1$, ce qui permet de conclure :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |b_n| \leq 1$$

10.e

D'après la question précédente, on a $|b_n t^{2n}| \leq t^{2n}$. Or, la série $\sum t^{2n}$ converge pour tout $t \in]-1, 1[$, donc, par comparaison de séries à termes positifs, on peut dire que la série $\sum |b_n t^{2n}|$ converge. Ainsi :

La série $\sum_{n \geq 0} b_n t^{2n}$ converge absolument pour tout $t \in]-1, 1[$.

Pour tout $t \in]-1, 1[$, les deux séries $\sum_{n \geq 0} a_n t^{2n}$ et $\sum_{n \geq 0} b_n t^{2n}$ convergent absolument. La série produit de Cauchy de ces deux dernières séries converge donc aussi absolument si $t \in]-1, 1[$. Si on note $\sum_{n \geq 0} c_n t^{2n}$ cette série produit, ses coefficients c_n sont donnés par :

$$c_0 = a_0 b_0 = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, c_n = \sum_{k=0}^n b_k a_{n-k} = 0$$

On en déduit que $\left(\sum_{n \geq 0} a_n t^{2n} \right) \times \left(\sum_{n \geq 0} b_n t^{2n} \right) = 1$ ce qui s'écrit encore :

$$\boxed{\forall t \in]-1, 1[, \operatorname{ch}(t)g(t) = 1}$$

11.a

La fonction f est de classe C^∞ sur $] -R, R[$, donc, sur $] -1, 1[$, et on trouve, pour tout $t \in]-1, 1[$:

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (2n) u_n t^{2n-1} \quad f''(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (2n)(2n-1) u_n t^{2n-2}$$

On en déduit, pour tout $t \in]-1, 1[$:

$$f''(t) - f(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} 2(p+1)(2p+1) u_{p+1} t^{2p} - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n t^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} [2(n+1)(2n+1) u_{n+1} - u_n] t^{2n}$$

L'égalité $f''(t) - f(t) = \frac{1}{\operatorname{ch}(t)}$ permet alors de déduire, par unicité du développement en série entière :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 2(n+1)(2n+1) u_{n+1} - u_n = b_n}$$

11.b

La suite u_n est définie par $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{b_n + u_n}{(2n+1)(2n+2)}$$

Une telle suite est donc unique. Par ailleurs, on a $|u_0| \leq 1$ et si n est un entier naturel tel que $|u_n| \leq 1$, alors, on déduit que :

$$|u_{n+1}| = \frac{|b_n + u_n|}{(2n+1)(2n+2)} \leq \frac{|b_n| + |u_n|}{(2n+1)(2n+2)} \stackrel{10.d}{\leq} \frac{2}{(2n+1)(2n+2)} \leq 1$$

Le principe de récurrence permet donc de conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq 1}$$

11.c

La fonction précédemment définie est une fonction paire, solution de l'équation différentielle

$$y'' - y = \frac{1}{\operatorname{ch}(t)}$$

sur $] -1, 1[$ et vérifiant $f(0) = u_0 = 1$. On en déduit que $f = \theta$, et comme f est développable en série entière sur $] -1, 1[$, on peut conclure :

$$\boxed{\text{La fonction } \theta \text{ est développable en série entière sur }]-1, 1[.}$$

11.d

Par définition de la fonction θ , on a :

$$\forall t \in]-1, 1[, \theta(t) = \operatorname{ch}(t) + t \operatorname{sh}(t) - \operatorname{ch}(t) \ln(\operatorname{ch}(t))$$

On en déduit que :

$$\forall t \in]-1, 1[, \ln(\operatorname{ch}(t)) = (\operatorname{ch}(t) + t \operatorname{sh}(t) - \theta(t)) \times \frac{1}{\operatorname{ch}(t)}$$

En tant que produit de fonctions développables en série entière sur $] -1, 1[$, on peut conclure :

$$\boxed{\text{La fonction } t \mapsto \ln(\operatorname{ch}(t)) \text{ est développable en série entière sur }]-1, 1[.}$$

FIN !