

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

PARTIE I - Etudes de fonctions

1. Préciser, en le démontrant, un équivalent simple de $\operatorname{ch}(t)$ et $\operatorname{sh}(t)$ lorsque le réel t tend vers $+\infty$.
2. Etablir les tableaux de variations (avec les limites aux bornes) des deux fonctions définies sur $]0, +\infty[$:

$$g_1 : t \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}(t)} \qquad g_2 : t \mapsto \frac{t}{\operatorname{sh}(t)}$$

PARTIE II - Intégrales et développements en série

3. (a) Justifier l'existence de l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(b) Déterminer une relation entre I_{n+1} et I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis en déduire la valeur de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\alpha > 0$, calculer la valeur de $\int_0^{+\infty} t^n e^{-\alpha t} dt$.
4. (a) Justifier que, pour tout $t \geq 0$, on a : $\frac{e^t}{2} \leq \operatorname{ch}(t) \leq e^t$.
(b) En déduire l'existence de $C_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{\operatorname{ch}(t)} dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ainsi qu'un encadrement du rapport $\frac{C_n}{I_n}$.
(c) Grâce au calcul de la dérivée de la fonction $t \mapsto \operatorname{Arctan}(e^t)$, calculer C_0 .
(d) Justifier l'égalité, pour tout $t > 0$: $\frac{1}{2\operatorname{ch}(t)} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k e^{-(2k+1)t}$.
(e) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, C_n = 2(n!) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{n+1}}$.
5. (a) Justifier l'existence de $S_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{\operatorname{sh}(t)} dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
(b) Justifier l'égalité, pour tout $t > 0$: $\frac{1}{2\operatorname{sh}(t)} = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-(2k+1)t}$.
(c) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = 2(n!) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^{n+1}}$.
(d) En admettant que $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer S_1 .

PARTIE III - Intégrales à paramètres

Pour tout réel x , on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{\operatorname{ch}(t)} dt$ et $H(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch}(t)} dt$.

6. (a) Démontrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , exprimer $F'(x)$ sous forme d'une intégrale.
 (b) Démontrer que F est développable en série entière sur $] -1, 1[$. Justifier que le rayon de convergence de ce développement est égal à 1.
 (c) En effectuant une intégration par parties, majorer $|xF(x)|$ indépendamment du réel x . En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.
7. (a) Soient $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Justifier, à l'aide de 4.d que : $\left| \frac{1}{2\operatorname{ch}(t)} - \sum_{k=0}^n (-1)^k e^{-(2k+1)t} \right| \leq e^{-(2n+3)t}$.
 (b) En déduire que, pour tout réel x et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left| H(x) - \sum_{k=0}^n 2(-1)^k \left(\int_0^{+\infty} e^{-(2k+1)t} \cos(xt) dt \right) \right| \leq 2 \int_0^{+\infty} e^{-(2n+3)t} dt$$

- (c) Pour tout réel x et pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $\int_0^{+\infty} e^{-(2k+1)t} \cos(xt) dt$.
 (d) Conclure que : $\forall x \in \mathbb{R}, H(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^k (2k+1)}{(2k+1)^2 + x^2}$.

PARTIE IV - Etude d'une équation différentielle

On s'intéresse ici à $\mathcal{S} = \left\{ y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}, y''(t) - y(t) = \frac{1}{\operatorname{ch}(t)} \right\}$.

8. Exprimer, à l'aide de fonctions hyperboliques, toutes les $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $y'' = y$.
 9. (a) Donner la forme générale d'une solution $y \in \mathcal{S}$. (On pourra chercher une solution particulière de l'équation avec second membre sous la forme $y(t) = z(t)\operatorname{ch}(t)$)
 (b) Existe-t-il des fonctions impaires appartenant à $\mathcal{S}$?
 (c) Expliciter l'unique solution $\theta \in \mathcal{S}$, paire, telle que $\theta(0) = 1$.

10. (a) Déterminer explicitement l'unique suite réelle $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que : $\forall t \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^{2k}$.
 (b) Montrer l'existence et l'unicité d'une suite réelle $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ (que l'on ne cherchera pas à déterminer explicitement, mais que l'on définira par récurrence) telle que $b_0 a_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^n b_k a_{n-k} = 0$.
 (c) Préciser b_0, b_1 et b_2 .
 (d) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, |b_n| \leq 1$. (on supposera connu que $\operatorname{ch}(1) \leq 2$).
 (e) En déduire que, pour tout $t \in]-1, 1[$, la série $g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^{2n}$ converge absolument, avec de plus $\operatorname{ch}(t)g(t) = 1$.
 On a ainsi prouvé que $t \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}(t)}$ est développable en série entière sur $] -1, 1[$.

11. On suppose qu'il existe une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $u_0 = 1$ et telle que la série entière définie par $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n t^{2n}$ ait un rayon de convergence $R \geq 1$, et vérifie :

$$\forall t \in]-1, 1[, f''(t) - f(t) = \frac{1}{\operatorname{ch}(t)}$$

- (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer une relation entre u_{n+1}, u_n et b_n .
 (b) En déduire qu'une telle suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est unique et montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq 1$$

- (c) En déduire que la fonction θ considérée dans la question 9.c est développable en série entière sur $] -1, 1[$.
 (d) Justifier que la fonction $x \mapsto \ln(\operatorname{ch}(x))$ est développable en série entière sur l'intervalle $] -1, 1[$.