

1.a

Raisonnons par double implication.

▷ Supposons que u est autoadjoint et que ses valeurs propres sont strictement positives. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$. D'après le cours, $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique. Or, les valeurs propres de M sont les valeurs propres de u , donc, sont strictement positives. On en déduit que $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

▷ Supposons réciproquement que la matrice de u dans n'importe quelle base orthonormale appartient à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. D'après le cours, on peut déjà affirmer que u est un endomorphisme autoadjoint, et là encore, puisque u et sa matrice dans une base quelconque ont les mêmes valeurs propres, on déduit que les valeurs propres de u sont strictement positives. En conclusion :

$$u \text{ est autoadjoint à valeurs propres dans } \mathbb{R}_+^* \iff \text{sa matrice dans n'importe quelle BON est dans } \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$

1.b

Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. En écrivant $\text{Sp}(S) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, on sait que $\det(S) = \prod_{k=1}^n \lambda_k$. Tous les λ_k étant strictement positifs, on en déduit que $\det(S) > 0$, de sorte que S est inversible. D'autre part, on trouve que $(S^{-1})^T = (S^T)^{-1} = S^{-1}$, de sorte que S^{-1} est symétrique. Ses valeurs propres ne sont autres que les $\frac{1}{\lambda_k}$ strictement positifs, donc, $S^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. En conclusion :

$$\text{Si } S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}), \text{ alors, } S \text{ est inversible et } S^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}).$$

2.a

Commençons par remarquer que les endomorphismes u et v commutent. En effet :

$$u \circ v = v^2 \circ v = v^3 = v \circ v^2 = v \circ u$$

D'après le cours, l'espace $\text{Ker}(u - \lambda \text{Id})$ est donc stable par v , ce qui permet de déduire :

$$v \text{ induit un endomorphisme } v_\lambda \text{ de } \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}).$$

2.b

L'endomorphisme v est diagonalisable (car autoadjoint), donc, son application induite v_λ sur E_λ l'est aussi (c'est un résultat du cours, conséquence du fait qu'un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il annule un polynôme scindé et à racines simples). Soit μ une valeur propre de v_λ : il existe $x \in E_\lambda \setminus \{0\}$ tel que $v_\lambda(x) = \mu x$. On en déduit que $v_\lambda^2(x) = \mu^2 x$. Or, $v_\lambda^2(x) = u(x) = \lambda x$, donc, $\lambda x = \mu^2 x$, et puisque $x \neq 0$, on obtient $\lambda = \mu^2$. Le réel μ étant strictement positif, on en déduit que $\mu = \sqrt{\lambda}$. L'endomorphisme v_λ est donc diagonalisable et possède pour unique valeur propre $\sqrt{\lambda}$, donc :

$$v_\lambda = \sqrt{\lambda} \text{Id}_{E_\lambda}$$

2.c

L'endomorphisme u est autoadjoint, donc, diagonalisable avec des sous-espaces propres orthogonaux. On peut donc écrire $\mathbb{R}^n$ comme la somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u :

$$\mathbb{R}^n = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}$$

où les λ_k désignent les valeurs propres de u . Si x est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, il se décompose donc de manière unique dans cette somme sous la forme $x = x_1 + \dots + x_p$. On a alors nécessairement $v(x) = v(x_1) + \dots + v(x_p)$, ce qui implique, d'après la question précédente :

$$v(x) = \sqrt{\lambda_1}x_1 + \dots + \sqrt{\lambda_p}x_p \quad (*)$$

En cas d'existence, l'endomorphisme v est donc unique et défini par la formule (*). Réciproquement, considérons l'endomorphisme v défini par l'égalité (*). Tout d'abord, on constate que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} v^2(x) &= v\left(\sqrt{\lambda_1}x_1 + \dots + \sqrt{\lambda_p}x_p\right) = \sqrt{\lambda_1}v(x_1) + \dots + \sqrt{\lambda_p}v(x_p) \\ &= \lambda_1x_1 + \dots + \lambda_px_p = u(x) \end{aligned}$$

d'où $v^2 = u$. Démontrons maintenant que v est autoadjoint. Considérons pour cela deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$, décomposés dans la somme directe orthogonale $\mathbb{R}^n = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}$ sous la forme $x = x_1 + \dots + x_p$ et $y = y_1 + \dots + y_p$. On trouve :

$$\langle v(x), y \rangle = \sum_{k=1}^p \sqrt{\lambda_k} \langle x_k, y \rangle = \sum_{k=1}^p \sqrt{\lambda_k} \langle x_k, y_k \rangle = \langle x, v(y) \rangle$$

Démontrons pour terminer que les valeurs propres de v sont strictement positives. Si on considère une base orthonormale $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^n = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}$, on constate que la matrice de v dans $\mathcal{B}$ est diagonale et a pour éléments diagonaux les $\sqrt{\lambda_k}$. Les valeurs propres de v sont donc strictement positives. L'endomorphisme v convient donc. En conclusion :

Il existe un unique endomorphisme v autoadjoint tel que $\text{Sp}(v) \subset \mathbb{R}_+^*$ et $v^2 = u$.

2.d

Raisonnons à l'aide de matrices. En notant $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u , il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ soit diagonale par blocs avec des blocs de la forme $\lambda_1 I_{n_1}, \lambda_2 I_{n_2}, \dots, \lambda_p I_{n_p}$ et $n_1 + \dots + n_p = n$. Dans cette même base, on trouve que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ est diagonale par blocs avec pour blocs diagonaux $\sqrt{\lambda_1} I_{n_1}, \sqrt{\lambda_2} I_{n_2}, \dots, \sqrt{\lambda_p} I_{n_p}$. Ainsi, un polynôme Q vérifiera $Q(u) = v$ si et seulement si $Q(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$, ce qui revient à dire que : $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, Q(\lambda_k) = \sqrt{\lambda_k}$. Un tel polynôme peut être construit en considérant les polynômes de Lagrange $L_1, \dots, L_p$ associés aux réels deux à deux distincts $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ et en posant $Q = \sum_{k=1}^p \sqrt{\lambda_k} L_k$. En conclusion :

Il existe un $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q(u) = v$.

3.a

Tout d'abord, on trouve $(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$, donc, la matrice $A^T A$ est symétrique. Montrons maintenant que ses valeurs propres sont strictement positives. Considérons une valeur propre λ de cette matrice. Par définition, il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que $A^T A X = \lambda X$. En multipliant chaque membre à gauche par X^T , on obtient alors : $X^T A^T A X = \lambda X^T X$, ce qui s'écrit encore $(AX)^T AX \stackrel{(1)}{=} \lambda X^T X$. Rappelons alors que, si x et y sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ représentés par les vecteurs colonnes X et Y , le produit scalaire de x et y s'écrit aussi $X^T Y$. Si on désigne par x le vecteur de $\mathbb{R}^n$ représenté par la matrice colonne X , et par y le vecteur de $\mathbb{R}^n$ représenté par la matrice colonne AX , l'égalité (1) s'écrit encore $\langle y, y \rangle = \lambda \langle x, x \rangle$. Puisque X est non nul, on a $x \neq 0$ puis $\langle x, x \rangle > 0$, et puisque A est inversible, on a $AX \neq 0$, d'où $y \neq 0$, ce qui implique $\langle y, y \rangle > 0$. Finalement : $\lambda = \frac{\langle y, y \rangle}{\langle x, x \rangle} > 0$. En conclusion :

$$A^T A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$

3.b

La matrice $A^T A$ appartient à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. D'après la question 2, il existe donc une matrice $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A^T A = S^2$. En posant alors $O = AS^{-1}$, on a bien $A = OS$. Par ailleurs :

$$O^T O = (AS^{-1})^T AS^{-1} = (S^T)^{-1} A^T AS^{-1} = S^{-1} S^2 S^{-1} = I_n$$

La matrice O appartient donc à $O(n)$ et on dispose donc d'un couple $(O, S) \in O(n) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ qui convient. Démontrons maintenant l'unicité d'une telle décomposition. Supposons qu'il existe deux couples solutions (O, S) et (O', S') . On trouve alors $A^T A = S^2$ et $A^T A = (S')^2$, donc, d'après l'unicité de la décomposition dans la question 2, on déduit que $S = S'$, puis de l'égalité $OS = O'S$, on déduit, que $O = O'$ en multipliant chaque membre à droite par S^{-1} . En conclusion :

$$\exists! (O, S) \in O(n) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}), A = OS$$

3.c

Tout d'abord, la matrice A est inversible car $\det(A) = 48 \neq 0$. On peut donc appliquer ce qui précède. On trouve

$A^T A = \begin{bmatrix} 10 & 0 & -6 \\ 0 & 36 & 0 \\ -6 & 0 & 10 \end{bmatrix}$. La matrice $A^T A$ est symétrique réelle et peut se diagonaliser dans une base orthonormale sous

la forme $A^T A = PDP^T$ avec :

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \in O(3) \qquad D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{bmatrix}$$

On pose donc, d'après les questions précédentes :

$$S = P \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} P^\top = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

et

$$O = AS^{-1} = A \times \begin{bmatrix} 3/8 & 0 & 1/8 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 1/8 & 0 & 3/8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

4 Considérons la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On trouve :

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\in O(2)} \times \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\in \mathcal{S}_2^+(\mathbb{R})} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\in O(2)} \times \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\in \mathcal{S}_2^+(\mathbb{R})}$$

On dispose donc de deux décompositions différentes de la matrice A , donc, il n'y a pas unicité.

5 Supposons que $(*)$ admet une solution $X \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Considérons une valeur propre λ de $A^\top A$: il existe $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que $A^\top AU = \lambda U$. L'égalité $X^\top X = I_n - A^\top A$ permet alors d'écrire que $X^\top XU = (I_n - A^\top A)U = U - \lambda U = (1 - \lambda)U$ de sorte que $1 - \lambda$ est une valeur propre de $X^\top X$. D'après la question **3.a**, on déduit donc que $1 - \lambda > 0$, ce qui implique $\lambda < 1$. D'autre part, par un raisonnement analogue à **3.a**, on démontrerait que $A^\top A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, de sorte que $\lambda \geq 0$. Finalement :

$$\text{Si } (*) \text{ admet une solution } X \in \text{GL}_n(\mathbb{R}), \text{ alors, } \text{Sp}(A^\top A) \subset [0, 1[.$$

6.a On cherche les solutions $X \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, donc, d'après la question **3**, on peut écrire ces solutions sous la forme $X = UH$ avec $U \in O(n)$ et $H \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

6.b On trouve :

$$I_n = A^\top A + X^\top X = A^\top A + H^\top \underbrace{U^\top U}_{I_n} H = A^\top A + H^\top H = A^\top A + H^2$$

ce qui peut encore s'écrire $H^2 = I_n - A^\top A$. Or, la matrice $I_n - A^\top A$ appartient à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. En effet, il est facile de vérifier qu'elle est symétrique; d'autre part, λ est une valeur propre de $I_n - A^\top A$ si et seulement si $1 - \lambda$ est une valeur propre de $A^\top A$, ce qui revient à dire que $1 - \lambda \in [0, 1[$, soit encore $\lambda \in]0, 1]$. On a donc $H^2 = I_n - A^\top A$ avec $H \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $I_n - A^\top A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. D'après la question **2**, une telle matrice est unique : il s'agit de la « racine carrée » de la matrice $I_n - A^\top A$.

6.c La matrice H étant déterminée par la question précédente, il suffit de trouver une matrice U convenable. La première condition du système $(*)$ est satisfaite, donc, il suffit que la seconde le soit aussi pour résoudre le problème. Il suffit donc d'avoir $A^\top(UH) - (UH)^\top A = 0$, soit encore que $A^\top UH \stackrel{\diamond}{=} HU^\top A$. Puisque $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il est possible, d'après la question **4**, d'écrire $A = OS$ avec $O \in O(n)$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. La condition $\diamond$ s'écrit alors $SO^\top UH = HU^\top OS$. Il est donc naturel de poser $U = O$, et la condition $\diamond$ devient $SH = HS$. Mais cette dernière condition est nécessairement vérifiée (en effet, d'après **2.d**, H est un polynôme en $I_n - A^\top A$, donc, un polynôme en $A^\top A$, donc, un polynôme en S^2 , donc, un polynôme en S). Finalement, la matrice $X = OH$ (qui est inversible car O et H le sont) convient.

$$\text{Il existe une solution } X \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ du système } (*)$$

7 On peut commencer par écrire $A^\top = (UBU^{-1})^\top = (U^{-1})^\top B^\top U^\top$. Or, on déduit de l'égalité $UU^\top = I_n$ que $U^{-1} = \overline{U}^\top$, d'où $(U^{-1})^\top = \overline{U}$. En conjuguant cette dernière égalité puis en prenant sa transposée, on obtient également $U^\top = \overline{U}^{-1}$. Il en résulte $A^\top = \overline{U}B^\top \overline{U}^{-1}$. En conjuguant cette dernière égalité et en rappelant que $A^\top$ et $B^\top$ sont à coefficients réels, on déduit :

$$A^\top = U(B^\top)U^{-1}$$

8.a

La fonction $g : t \mapsto \det(X + tY)$ est polynomiale (cela pourrait se démontrer par récurrence sur la taille de la matrice) et elle n'est pas nulle car $g(i) = \det(U) \neq 0$. Ainsi, elle admet un nombre fini de racines réelles et il existe donc bien un réel en lequel g ne s'annule pas :

$$\boxed{\text{Il existe } \mu \in \mathbb{R} \text{ tel que } X + \mu Y \in \text{GL}_n(\mathbb{R})}$$

8.b

L'égalité $A = UBU^{-1}$ s'écrit encore $AU = UB$, soit encore $A(X + iY) = (X + iY)B$. En identifiant les parties réelles d'une part, et les parties imaginaires d'autre part, on obtient, comme annoncé :

$$\boxed{AX = XB} \quad \boxed{AY = YB}$$

8.c

Posons $P = X + \mu Y \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. D'après les égalités précédentes, on a $AP = PB$, de sorte que $A = PBP^{-1}$. D'autre part, en partant cette fois de l'égalité $A^\top = U \begin{pmatrix} B^\top \end{pmatrix} U^{-1}$, on déduit que $A^\top U = UB^\top$, dont on déduit $A^\top X = XB^\top$ et $A^\top Y = YB^\top$ puis $A^\top P = PB^\top$. En conclusion :

$$\boxed{A = PBP^{-1} \text{ et } A^\top = PB^\top P^{-1}}$$

9.a

De l'égalité $P = OS$, on déduit que $P^\top P = S^2$. On en déduit :

$$S^2 B = P^\top P B = P^\top (PB) = P^\top (AP) = (P^\top A) P = (A^\top P)^\top P = (PB^\top)^\top P = BP^\top P = BS^2$$

On a donc bien l'égalité :

$$\boxed{S^2 B = BS^2}$$

On a $S^2 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, donc, d'après la question 2 adaptée aux matrices, on peut dire qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $S = Q(S^2)$ (en effet, dès que $v^2 = u$, alors, on peut écrire $v = Q(u)$). Ainsi, puisque B commute avec S^2 , B commute avec tout polynôme en S^2 , donc, avec S . Autrement dit :

$$\boxed{BS = SB}$$

9.b

En utilisant cette dernière égalité, on déduit :

$$A = PBP^{-1} = OSB(OS)^{-1} = OSBS^{-1}O^{-1} = OBSS^{-1}O^{-1} = OBO^{-1}$$

ce qui s'écrit encore :

$$\boxed{A = OBO^\top}$$

10

Cela résulte de la linéarité de la trace !

11

Considérons, comme l'énoncé le suggère, l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & f_A \end{array}$$

Il est facile de vérifier que φ est linéaire (cela résulte essentiellement de la linéarité de la trace). Par ailleurs, si $A \in \text{Ker}(\varphi)$, alors, $f_A = 0$, d'où $\text{Tr}(AM) = 0$ pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En prenant $M = A^\top$, on déduit $\|A\|^2 = \text{Tr}(A^\top A) = 0$ (où $\|\cdot\|$ désigne la norme canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) d'où $A = 0$. L'application φ est donc injective, et comme les espaces $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ ont la même dimension (à savoir n^2), l'application φ est donc bijective. En particulier, la forme linéaire f proposée par l'énoncé admet un unique antécédent par φ , c'est-à-dire :

$$\boxed{\text{Il existe une unique matrice } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que : } \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(M) = \text{Tr}(AM)}$$

12.a

Une petite recherche au brouillon permet de trouver rapidement :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \quad \text{où} \quad a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On vérifie que si $M = (m_{ij})$, alors, $(AM)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} m_{kj} = \sum_{k=i}^n m_{kj}$, d'où $\text{Tr}(AM) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=i}^n m_{ki}$, ce qui est la somme attendue.

12.b

On trouve, par exemple avec la résolution d'un système :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

13.a

Si on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme classique $\|A\| = \sqrt{\text{Tr}(A^T A)}$, alors, toute matrice orthogonale O a pour norme $\|O\| = \sqrt{\text{Tr}(I_n)} = \sqrt{n}$, d'où $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (rappelons qu'on travaille en dimension finie, donc, le choix de la norme n'a pas d'importance). D'autre part, l'application $F : M \mapsto M^T M$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, car les coefficients de $M^T M$ sont des polynômes en les coefficients de M . Il reste alors à remarquer que $\mathcal{O}(n)$ est l'image réciproque par l'application continue F du fermé $\{I_n\}$, donc, à ce titre, $\mathcal{O}(n)$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En conclusion :

$$\mathcal{O}(n) \text{ est une partie fermée et bornée de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

13.b

L'application f est linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie, donc, f est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En particulier, f est continue sur le fermé-borné $\mathcal{O}(n)$, donc, à ce titre, f est bornée et atteint ses bornes, donc :

$$M_n = \sup_{O \in \mathcal{O}(n)} f(O) \text{ existe.}$$

13.c

Nous avons déjà vu dans la question 3.a que la matrice $A^T A$ est symétrique. Par ailleurs, on peut facilement adapter la démonstration de cette question (sans forcément supposer A inversible) pour démontrer que les valeurs propres de cette matrice sont positives. Ainsi :

$$A^T A \text{ admet } n \text{ valeurs propres positives } \mu_1, \dots, \mu_n.$$

13.d

D'après la question 4, il existe $Q \in \mathcal{O}(n)$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = QS$. Notons qu'avec les notations de la question 3, on peut écrire $S = PDP^T$ où $D = \text{Diag}(\sqrt{\mu_1}, \dots, \sqrt{\mu_n})$. Ainsi, si $O \in \mathcal{O}(n)$, on peut écrire :

$$f(O) = \text{Tr}(AO) = \text{Tr}(QSO) = \text{Tr}(QPDP^T O)$$

Avec la propriété bien connue $\text{Tr}(MN) = \text{Tr}(NM)$, on déduit : $f(O) = \text{Tr}(DP^T OQP)$.

Il reste à remarquer que l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(n) & \longrightarrow & \mathcal{O}(n) \\ O & \longmapsto & \Omega = P^T OQP \end{array}$ est bijective, de sorte que :

$$M_n = \sup_{O \in \mathcal{O}(n)} f(O) = \sup_{O \in \mathcal{O}(n)} \text{Tr}(DP^T OQP) = \sup_{\Omega \in \mathcal{O}(n)} \text{Tr}(D\Omega)$$

En conclusion :

$$M_n = \sup_{\Omega \in \mathcal{O}(n)} \text{Tr}(D\Omega)$$

13.e

Nous allons raisonner par double inégalité.

- Tout d'abord, en prenant $\Omega = I_n \in \mathcal{O}(n)$, on trouve $M_n \geq \text{Tr}(D) = \sum_{k=1}^n \sqrt{\mu_k}$.
- D'autre part, en notant $\Omega = (\omega_{ij})$, on trouve que : $\text{Tr}(D\Omega) = \sum_{k=1}^n \sqrt{\mu_k} \omega_{kk} \leq \sum_{k=1}^n \sqrt{\mu_k}$ en utilisant le résultat classique que les coefficients d'une matrice orthogonale appartiennent tous à $[-1, 1]$. On en déduit $M_n \leq \sum_{k=1}^n \sqrt{\mu_k}$. En conclusion :

$$M_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{\mu_k}$$

FIN !