

PROBLEME 1

1.a En utilisant la matrice A , on trouve que :

$$u(x) = (a + 2b)e_1 + (-2a + b)e_2$$

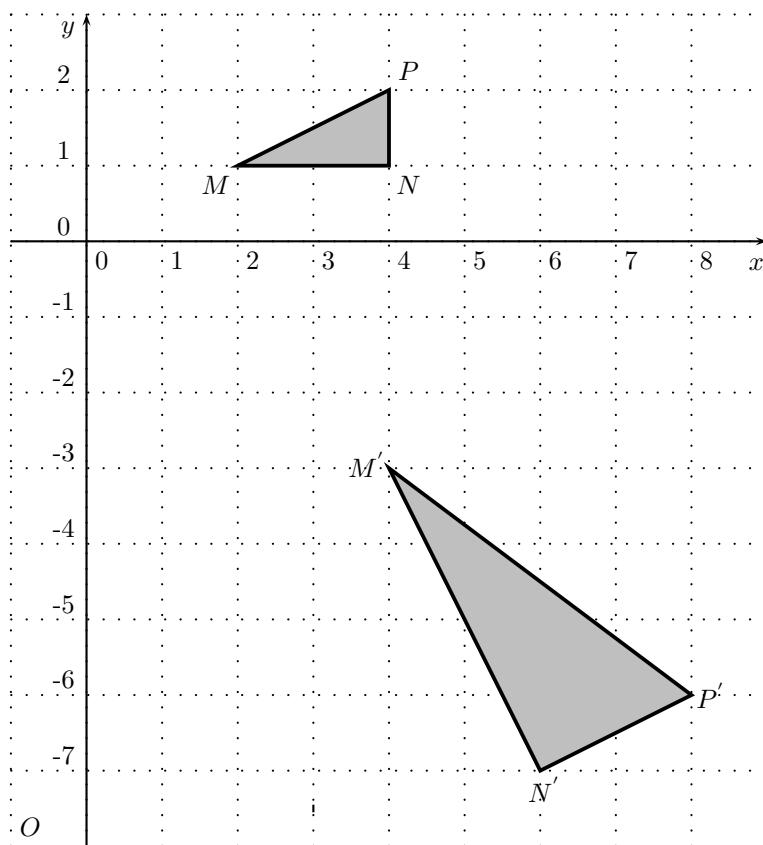
1.b La base $\mathcal{B}$ est orthonormale, donc :

$$\|u(x)\| = \sqrt{(a + 2b)^2 + (-2a + b)^2} = \sqrt{5a^2 + 5b^2} = \sqrt{5}\|x\|$$

On peut donc écrire :

$$u \text{ est une similitude de rapport } \sqrt{5}.$$

1.c.i Tout d'abord, on trouve $M'(4; -3)$, $N'(6; -7)$ et $P'(8; -6)$. On en déduit la figure :



1.c.ii On trouve facilement $MN = 2$, $NP = 1$, donc, $\mathcal{A}_{MNP} = 1$. D'autre part, $M'N' = 2\sqrt{5}$, $N'P' = \sqrt{5}$, donc, $\mathcal{A}_{M'N'P'} = 5$. On en déduit :

$$\mathcal{A}_{M'N'P'} = (\sqrt{5})^2 \mathcal{A}_{MNP}$$

2.a Soit $f \in \text{Sim}(E)$. Puisque l'espace E est de dimension finie, démontrer la bijectivité de f revient à prouver par exemple son injectivité. Or, si on considère $x \in \text{Ker}(f)$, alors, $f(x) = 0$, et puisque $\|f(x)\| = k\|x\|$, on déduit $\|x\| = 0$, puis $x = 0$. Le noyau de f est donc réduit à $\{0\}$, et on peut conclure que f est bijectif. Finalement :

Tous les éléments de $\text{Sim}(E)$ sont bijectifs.

2.b

Considérons deux similitudes f et g de rapports respectifs k et k' . On trouve, pour tout $x \in E$:

$$\|(f \circ g)(x)\| = \|f(g(x))\| \underset{f \in \text{Sim}(E)}{=} k \|g(x)\| \underset{g \in \text{Sim}(E)}{=} k k' \|x\|$$

On déduit donc que $f \circ g \in \text{Sim}(E)$, c'est-à-dire :

Sim(E) est stable par composition.

2.c

Considérons une similitude f de rapport k . On trouve, pour tout $x \in E$:

$$\|f^{-1}(x)\| \underset{f \in \text{Sim}(E)}{=} \frac{1}{k} \|f(f^{-1}(x))\| = \frac{1}{k} \|x\|$$

On déduit donc que $f^{-1} \in \text{Sim}(E)$ (avec un rapport égal à $\frac{1}{k}$), c'est-à-dire :

Sim(E) contient les inverses de ses éléments.

2.d

Soient $u \in \mathcal{O}(E)$ et $f \in \text{Sim}(E)$. On trouve, pour tout $x \in E$:

$$\|(f^{-1} \circ u \circ f)(x)\| = \|f^{-1}((u \circ f)(x))\| \underset{f^{-1} \in \text{Sim}(E)}{=} \frac{1}{k} \|u(f(x))\| \underset{u \in \mathcal{O}(E)}{=} \frac{1}{k} \|f(x)\| \underset{f \in \text{Sim}(E)}{=} \frac{1}{k} \times k \|x\| = \|x\|$$

Finalement :

$\forall u \in \mathcal{O}(E), \forall f \in \text{Sim}(E), f^{-1} \circ u \circ f \in \mathcal{O}(E)$

2.e

Nous allons raisonner par double implication.

• Supposons que f est une similitude de rapport k . On a donc $\|f(x)\| = k\|x\|$ pour tout $x \in E$, ce qui se traduit matriciellement par $\sqrt{(AX)^\top(AX)} = k\sqrt{X^\top X}$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, soit encore par $X^\top (A^\top A) X \stackrel{(*)}{=} k^2 X^\top X$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Posons $S = A^\top A = (s_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ et posons, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, X_i le vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé sur la i -ème ligne qui vaut 1. L'application de $(*)$ avec $X = X_i$ donne $s_{ii} = k^2$ et l'application de $(*)$ avec $X = X_i + X_j$ (avec $i \neq j$) donne $s_{ii} + s_{ij} + s_{ji} + s_{jj} = 2k^2$, donc, $s_{ij} + s_{ji} = 0$. Or, il est facile de vérifier que la matrice S est symétrique, de sorte que $s_{ij} = s_{ji}$. On en déduit que $s_{ij} = 0$. On a donc l'égalité $S = k^2 I_n$, ce qui démontre la première implication.

• Supposons réciproquement que $A^\top A = k^2 I_n$. On trouve alors que $X^\top (A^\top A) X = k^2 X^\top X$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ce qui est la traduction matricielle de $\|f(x)\| = k\|x\|$ pour tout $x \in E$. L'application f est donc une similitude de rapport k . En conclusion :

f est une similitude de rapport k si et seulement si $A^\top A = k^2 I_n$.

2.f

On trouve $B^\top B = 9I_3$. Puisque la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est orthonormale, on peut appliquer le résultat de la question précédente pour affirmer :

u est une similitude de rapport 3

2.g

Par hypothèse, l'image par f de la sphère unité $S(0, 1)$ est une sphère de centre 0 que nous noterons $S(0, k)$, avec $k > 0$. Soit $x \in E$. Si $x \neq 0$, alors, $\frac{x}{\|x\|} \in S(0, 1)$, donc, $f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \in S(0, k)$, ce qui s'écrit encore, par linéarité de f et homogénéité de la norme :

$$k = \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \left\| \frac{1}{\|x\|} f(x) \right\| = \frac{1}{\|x\|} \|f(x)\|$$

On a donc $\|f(x)\| = k\|x\|$. Notons que cette égalité est encore valable si $x = 0$. L'application f est donc une similitude. En conclusion :

Si f envoie toute sphère de centre 0 sur une sphère de centre 0, alors, f est une similitude.

3.a.i

Raisonnons par double implication :

- Soit $f \in \text{Sim}(E)$. Désignons par k le rapport de f et posons $g = \frac{1}{k}f$. On trouve :

$$\forall x \in E, \|g(x)\| = \left\| \frac{1}{k}f(x) \right\| = \frac{1}{k}\|f(x)\| = \|x\|$$

L'application g est donc une isométrie vectorielle de E , et on peut donc écrire $f = g \circ k\text{Id}_E = k\text{Id}_E \circ g$, ce qui démontre la première implication.

- Supposons réciproquement que $f = g \circ k\text{Id}_E$ avec $k \in \mathbb{R}$ et $g \in \mathcal{O}(E)$. On trouve :

$$\forall x \in E, \|f(x)\| = \|g(kx)\| = \|kg(x)\| = |k|\|g(x)\| = |k|\|x\|$$

donc, f est une similitude de rapport $|k|$. Finalement :

$$f \in \text{Sim}(E) \text{ si et seulement si il existe } g \in \mathcal{O}(E) \text{ et } \alpha \in \mathbb{R} \text{ tels que } f = g \circ \alpha\text{Id}_E.$$

3.a.ii

Il a déjà été établi dans la question 1 que u est une similitude de rapport $\sqrt{5}$. Cela nous conduit donc à écrire :

$$A = \sqrt{5}B \quad \text{avec} \quad B = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Il est facile de vérifier que $B \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ et que $\det(B) = 1$. Ainsi, B est la matrice d'une rotation dont un angle est donné par :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(\theta) = -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Finalement :

$$\text{La similitude } u \text{ est la composée de l'homothétie de rapport } \sqrt{5} \text{ et de la rotation d'angle } \theta = -\text{Arcsin}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

3.b

Nous allons raisonner par double implication :

- Supposons que $f \in \text{Sim}(E)$. En utilisant l'identité de polarisation

$$\langle x|y \rangle = \frac{1}{4} (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in E^2, \langle f(x)|f(y) \rangle &= \frac{1}{4} (\|f(x)+f(y)\|^2 - \|f(x)-f(y)\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|f(x+y)\|^2 - \|f(x-y)\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (k^2\|x+y\|^2 - k^2\|x-y\|^2) \\ &= k^2 \langle x|y \rangle \end{aligned}$$

- Réciproquement, supposons qu'il existe $k > 0$ tel que $\langle f(x), f(y) \rangle = k^2 \langle x, y \rangle$ pour tout $(x, y) \in E^2$. alors :

$$\forall x \in E, \|f(x)\| = \sqrt{\langle f(x)|f(x) \rangle} = \sqrt{k^2 \langle x|x \rangle} = k\|x\|$$

En conclusion :

$$f \in \text{sim}(E) \text{ si et seulement si : } \forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), f(y) \rangle = k^2 \langle x, y \rangle$$

PROBLEME 2

1.a On a $t^k \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} 1$ et $\sqrt{1-t^2} = \sqrt{1+t}\sqrt{1-t} \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-t}$, d'où :

$$\frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}} \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}}$$

1.b La fonction $t \mapsto \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $[0, 1[$. L'intégrale proposée est donc impropre en 1. Or :

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt = [-2\sqrt{1-t}]_0^x = 2 - 2\sqrt{1-x} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} 2$$

L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt$ est donc convergente, donc, d'après l'équivalence de la question précédente et par comparaison d'intégrales de fonctions positives, on déduit que :

$$\text{L'intégrale } \int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}} dt \text{ converge}$$

1.c Si k est pair, la fonction sous l'intégrale est paire et si k est impair, la fonction sous l'intégrale est impaire. La convergence de la question précédente permet donc directement de conclure :

$$\text{L'intégrale } \int_{-1}^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}} dt \text{ converge}$$

2.a Si P et Q sont deux polynômes, la fonction $t \mapsto P(t)Q(t)$ est une combinaison linéaire de fonctions $t \mapsto t^k$. Ainsi, $\varphi(P, Q)$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire d'intégrales de la forme $\int_{-1}^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}} dt$. On peut donc écrire :

$$\text{Pour tout } (P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2, \text{ l'intégrale } \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \text{ converge.}$$

2.b Par commutativité de $\mathbb{R}$, on peut dire que $\varphi(P, Q) = \varphi(Q, P)$, donc, l'application φ est symétrique. Par ailleurs, elle est linéaire à gauche par linéarité de l'intégrale, donc, grâce à la symétrie, on peut affirmer qu'elle est bilinéaire. Si $P \in \mathbb{R}[X]$, alors, $\varphi(P, P) = \int_{-1}^1 \frac{(P(t))^2}{\sqrt{1-t^2}} dt \geq 0$, d'où la positivité. Enfin, si $P \in \mathbb{R}[X]$ est tel que $\varphi(P, P) = 0$, alors, l'intégrale $\int_{-1}^1 \frac{(P(t))^2}{\sqrt{1-t^2}} dt$ est nulle, et puisque la fonction sous l'intégrale est continue et positive sur $] -1, 1[$, on en déduit qu'elle est nulle sur $] -1, 1[$. La fonction P est donc nécessairement nulle sur $] -1, 1[$. Le polynôme P admet donc une infinité de racines, donc, $P = 0$. Finalement :

$$\varphi \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X].$$

3.a On trouve directement $f_0(x) = 1$ et $f_1(x) = x$. Par ailleurs, avec la formule $\cos(2u) = 2\cos^2(u) - 1$, on obtient $f_2(x) = 2x^2 - 1$. Enfin, on trouve facilement que $\cos(3u) = 4\cos^3(u) - 3\cos(u)$, ce qui permet d'obtenir $f_3(x) = 4x^3 - 3x$. Finalement, pour tout $x \in [-1, 1]$:

$$f_0(x) = 1$$

$$f_1(x) = x$$

$$f_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$f_3(x) = 4x^3 - 3x$$

3.b La formule est la suivante :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

3.c

Soient $n \geq 1$ et $x \in [-1, 1]$. La formule précédente appliquée avec $a = n \operatorname{Arccos}(x)$ et $b = \operatorname{Arccos}(x)$ donne :

$$f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x) = 2 \cos(n \operatorname{Arccos}(x)) \cos(\operatorname{Arccos}(x))$$

ce qui permet d'obtenir exactement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [-1, 1], f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x) = 2x f_n(x)$$

3.d

Tout d'abord, à l'aide d'une récurrence double, on démontre que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\deg(T_k) = k$. Ainsi, n étant fixé, la famille $(T_0, T_1, \dots, T_n)$ est constituée de polynômes de degrés échelonnés, donc, cette famille est libre. De plus, elle contient $n + 1$ vecteurs et $\mathbb{R}_n[X]$ est justement de dimension $n + 1$, d'où :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ la famille } (T_0, T_1, \dots, T_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X]$$

3.e

On a $f_0(x) = T_0(x)$ et $f_1(x) = T_1(x)$ pour tout $x \in [-1, 1]$. Par ailleurs, f_{n+2} et T_{n+2} sont définis par la même relation de récurrence. Une récurrence double permet donc d'affirmer que :

$$\text{Pour tout } x \in [-1, 1] \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } T_n(x) = f_n(x)$$

4.a

Si $p \neq q$, alors, les deux entiers $p + q$ et $p - q$ sont non nuls (car p et q sont des entiers naturels). On trouve donc, à l'aide de la formule de la question **3.b** :

$$I_{p,q} = \frac{1}{2} \left[\int_0^\pi \cos((p+q)x) dx + \int_0^\pi \cos((p-q)x) dx \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin((p+q)x)}{p+q} \right]_0^\pi + \frac{1}{2} \left[\frac{\sin((p-q)x)}{p-q} \right]_0^\pi$$

ce qui donne finalement :

$$\text{Si } p \neq q, \text{ alors, } I_{p,q} = 0$$

4.b

On trouve tout d'abord $I_{0,0} = \pi$. Par ailleurs, si $p \in \mathbb{N}^*$:

$$I_{p,p} = \int_0^\pi \frac{\cos(2px) + 1}{2} dx = \left[\frac{\sin(2px)}{4p} + \frac{x}{2} \right]_0^\pi$$

Finalement :

$$I_{0,0} = \pi \quad \text{Si } p \in \mathbb{N}^*, \text{ alors, } I_{p,p} = \frac{\pi}{2}$$

5.a

Nous savons déjà que la famille $(T_0, T_1, \dots, T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Considérons maintenant deux entiers distincts p et q de $\llbracket 0, n \rrbracket$. Le changement de variable $t = \cos(\theta)$ (licite car $\theta \mapsto \cos(\theta)$ est de classe C^1 et strictement décroissante de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$) permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} \langle T_p, T_q \rangle &= \int_{-1}^1 \frac{T_p(t) T_q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_\pi^0 \frac{T_p(\cos(\theta)) T_q(\cos(\theta))}{\sqrt{1-\cos^2(\theta)}} (-\sin(\theta)) d\theta \\ &= \int_0^\pi \frac{\cos(p\theta) \cos(q\theta)}{|\sin(\theta)|} (\sin(\theta)) d\theta = \int_0^\pi \cos(p\theta) \cos(q\theta) d\theta = I_{p,q} = 0 \end{aligned}$$

La famille $(T_0, \dots, T_n)$ est donc orthogonale. En revanche, la quantité $\langle T_p, T_p \rangle$ ne vaut pas 1, donc :

$$\text{Si } n \in \mathbb{N}, \text{ la famille } (T_0, T_1, \dots, T_n) \text{ est une base orthogonale (non orthonormale) de } \mathbb{R}_n[X]$$

5.b

Si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, alors, d'après la question précédente, il est possible de décomposer P comme une combinaison linéaire de $T_0, T_1, \dots, T_{n-1}$. Or, d'après la question précédente, T_n est orthogonal aux polynômes $T_0, T_1, \dots, T_{n-1}$, donc, orthogonal à P . Ainsi, $\langle T_n, P \rangle = 0$ pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ d'où :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ le polynôme } T_n \text{ est orthogonal à } \mathbb{R}_{n-1}[X].$$

5.c La famille $\left(\frac{T_0}{\|T_0\|}, \frac{T_1}{\|T_1\|}, \dots, \frac{T_n}{\|T_n\|} \right)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, donc, d'après le cours :

$$X^n = \sum_{k=0}^n \left\langle X^n, \frac{T_k}{\|T_k\|} \right\rangle \frac{T_k}{\|T_k\|}$$

5.d Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A l'aide d'une récurrence double, on peut démontrer que T_n (qui est de degré n) admet 2^{n-1} comme coefficient dominant. Ainsi, le polynôme $T_n - 2^{n-1}X^n$ est de degré inférieur ou égal à $n-1$, donc, d'après la question **5.b**, on a $\langle T_n - 2^{n-1}X^n, T_n \rangle = 0$. On en déduit immédiatement l'égalité :

$$\langle X^n, T_n \rangle = \frac{\|T_n\|^2}{2^{n-1}}$$

FIN !