

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul, $O(n)$ désigne le groupe orthogonal d'ordre n , $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont positives ou nulles, et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont strictement positives.

PARTIE I - Généralités

1. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.
 - (a) Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Démontrer que u est un endomorphisme autoadjoint ayant des valeurs propres strictement positives si et seulement si sa matrice dans n'importe quelle base orthonormée appartient à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
 - (b) Montrer que si $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors, S est inversible et $S^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
2. Dans cette question, u désigne un endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}^n$ ayant ses valeurs propres strictement positives. On se propose de démontrer qu'il existe un unique endomorphisme v de $\mathbb{R}^n$, autoadjoint et à valeurs propres strictement positives, tel que $u = v^2$.
 - (a) Soient v un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, autoadjoint et à valeurs propres strictement positives tel que $v^2 = u$ et λ une valeur propre de u . Montrer que v induit un endomorphisme v_λ de $E_\lambda = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id})$.
 - (b) Prouver que $v_\lambda = \sqrt{\lambda} \text{Id}_{E_\lambda}$.
 - (c) (Difficile!) En déduire v puis répondre à la question initiale.
 - (d) Montrer qu'il existe un polynôme Q à coefficients réels tel que $v = Q(u)$.
3. Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$.
 - (a) Prouver que $A^\top A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
 - (b) En déduire qu'il existe un unique couple $(O, S) \in O(n) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = OS$.
On pourra utiliser la question 2 sous sa forme matricielle
 - (c) Déterminer les matrices O et S lorsque $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ \sqrt{2}/2 & 3\sqrt{2} & -3\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$.
4. On pourrait démontrer (mais ce n'est pas demandé ici) que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors, il existe un couple $(O, S) \in O(n) \times \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A = OS$. Démontrer que, contrairement au cas des matrices inversibles, une telle décomposition n'est pas unique (on pourra proposer un contre exemple simple de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$).

PARTIE II - Une première application

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On se propose de donner une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution $X \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ au système :

$$\begin{cases} A^\top A + X^\top X = I_n \\ A^\top X - X^\top A = O \end{cases} \quad (*)$$

5. Démontrer que si le système $(*)$ admet une solution dans $\text{GL}_n(\mathbb{R})$, alors, les valeurs propres de $A^\top A$ appartiennent à $[0, 1[$.
6. Réciproquement, on suppose que les valeurs propres de $A^\top A$ appartiennent à l'intervalle $[0, 1[$.
 - (a) Justifier que l'on peut chercher les solutions X de $(*)$ sous la forme $X = UH$ avec $U \in O(n)$ et $H \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
 - (b) Démontrer que la matrice H est unique et déterminer comment il est possible de l'obtenir.
 - (c) Montrer l'existence d'une solution X de $(*)$ appartenant à $\text{GL}_n(\mathbb{R})$.

PARTIE III - Une seconde application

Dans cette partie, A et B désignent deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe une matrice carrée $U \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $U\bar{U}^\top = I_n$ et $A = UBU^{-1}$ où $\bar{U}$ désigne la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de U .

7. Justifier que $A^\top = U \begin{pmatrix} B^\top \end{pmatrix} U^{-1}$.
8. On se propose de montrer qu'il existe une matrice $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$ et $A^\top = PB^\top P^{-1}$. Pour cela, on note X et Y les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $U = X + iY$.
 - (a) Démontrer qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $X + \mu Y \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$.
On pourra introduire la fonction $t \mapsto \det(X + tY)$
 - (b) Montrer que $AX = XB$ et $AY = YB$.
 - (c) Conclure.
9. On peut écrire P sous la forme $P = OS$ avec $O \in \mathcal{O}(n)$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
 - (a) Démontrer que $BS^2 = S^2B$ puis que $BS = SB$.
 - (b) En déduire qu'il existe $O \in \mathcal{O}(n)$ tel que $A = OBO^\top$.

PARTIE IV - Formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soit f une forme linéaire que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

10. Démontrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'application $f_A : \begin{matrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M \end{matrix} \begin{matrix} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \longmapsto \text{Tr}(AM) \end{matrix}$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
11. En déduire qu'il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(M) = \text{Tr}(AM)$$

On pourra étudier la bijectivité de l'application $\varphi : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto f_A$.

12. **Un exemple :** Dans cette question uniquement, on suppose que f est la forme linéaire définie par :

$$\forall M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(M) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n m_{ij}$$

- (a) Déterminer l'unique matrice A telle que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(M) = \text{Tr}(AM)$.
- (b) Calculer A^{-1} .
13. **Etude du sup de f sur $\mathcal{O}(n)$:**
 - (a) Démontrer que $\mathcal{O}(n)$ est une partie fermée et bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - (b) Justifier l'existence de $M_n = \sup_{O \in \mathcal{O}(n)} f(O)$.
 - (c) Justifier que $A^\top A$ admet n valeurs propres positives $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$.
 - (d) Démontrer que : $M_n = \sup_{\Omega \in \mathcal{O}(n)} \text{Tr}(D\Omega)$ où D est la matrice diagonale, dont les éléments diagonaux sont $\sqrt{\mu_1}, \sqrt{\mu_2}, \dots, \sqrt{\mu_n}$.
 - (e) En déduire que $M_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{\mu_k}$.