

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les deux problèmes qui suivent sont indépendants.

PROBLEME 1 : CCINP MP 2020

Dans ce problème, E est un espace vectoriel euclidien de dimension n muni d'un produit scalaire que l'on notera $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de norme associée $\|\cdot\|$. Un endomorphisme u de E est appelé une *similitude* de E lorsqu'il existe un réel $k > 0$ tel que pour tout vecteur x de E , $\|u(x)\| = k\|x\|$. On dira alors que u est une similitude de rapport k . Enfin, on notera $\text{Sim}(E)$, l'ensemble des similitudes de E .

1. Etude d'un exemple : Dans cette question, on considère l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ dont la matrice dans

la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$ est $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

- Soit $x = ae_1 + be_2 \in \mathbb{R}^2$. Exprimer les coordonnées de $u(x)$ dans $\mathcal{B}_0$.
- Démontrer que A est la matrice d'une similitude dont on précisera le rapport.
- Interprétation géométrique :* Le plan $\mathbb{R}^2$ est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les trois points $M(2, 1), N(4, 1), P(4, 2)$ et on définit les points M', N' et P' par les relations $u(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{OM'}$, $u(\overrightarrow{ON}) = \overrightarrow{ON'}$ et $u(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OP'}$.
 - Représenter dans un même repère les triangles MNP et $M'N'P'$.
 - Comparer les aires de ces deux triangles.

2. Propriétés de $\text{Sim}(E)$:

- Démontrer que tout élément de $\text{Sim}(E)$ est bijectif.
- Démontrer que $\text{Sim}(E)$ est stable par composition, c'est-à-dire : $\forall (f, g) \in (\text{Sim}(E))^2$, $f \circ g \in \text{Sim}(E)$.
- Démontrer que $\text{Sim}(E)$ contient les inverses de ses éléments, c'est-à-dire : $\forall f \in \text{Sim}(E)$, $f^{-1} \in \text{Sim}(E)$.
- Démontrer que : $\forall u \in \mathcal{O}(E)$, $\forall f \in \text{Sim}(E)$, $f^{-1} \circ u \circ f \in \mathcal{O}(E)$.
- Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Démontrer que :

$$f \text{ est une similitude de rapport } k \iff A^T \times A = k^2 I_n$$

On pourra s'inspirer de la démonstration du cours pour prouver que $u \in \mathcal{O}(E)$ si et seulement si $A^T A = I_n$

- Exemple :* Démontrer que la matrice B ci-dessous est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ d'une similitude u dont on donnera le rapport :

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que l'image par f de toute sphère de E de centre 0 est une sphère de E de centre 0. Démontrer que f est une similitude.

3. Deux caractérisations des similitudes :

- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que $f \in \text{Sim}(E)$ si et seulement si f est la composée d'un élément de $\mathcal{O}(E)$ et d'une homothétie vectorielle (c'est-à-dire, une application de la forme αId_E).
 - Ecrire la similitude u de la question 1 comme la composée d'une homothétie vectorielle (dont on précisera le rapport) et d'une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^2$ (dont on précisera la nature et les éléments caractéristiques).
- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que $f \in \text{Sim}(E)$ si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), f(y) \rangle = k^2 \langle x, y \rangle$$

PROBLEME 2 : CCINP TPC 2024

1. Etude d'une intégrale : Soit $k \in \mathbb{N}$.

- (a) Démontrer que $\frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}} \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}}$.
- (b) En déduire que l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}} dt$ converge.
- (c) Justifier la convergence de l'intégrale $\int_{-1}^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}} dt$

2. Etude d'un produit scalaire : Pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$, on pose $\varphi(P, Q) = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$.

- (a) Démontrer que $\varphi(P, Q)$ a bien un sens pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$.
- (b) Démontrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
Ce produit scalaire sera désormais noté $\langle P, Q \rangle$ et la norme associée sera notée $\|\cdot\|$.

3. Etude d'une famille de polynômes : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle f_n la fonction définie sur $[-1, 1]$ par :

$$f_n(x) = \cos(n \operatorname{Arccos}(x))$$

- (a) Soit $x \in [-1, 1]$. Exprimer $f_k(x)$ sous forme d'un polynôme pour tout $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$.
- (b) Rappeler la formule qui relie $\cos(a)\cos(b)$ à $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$ pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
- (c) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [-1, 1], f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x) = 2xf_n(x)$.
- (d) Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la famille de polynômes définie par :

$$T_0 = 1 \qquad T_1 = X \qquad \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(T_0, T_1, \dots, T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

- (e) Démontrer que, pour tout $x \in [-1, 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $T_n(x) = f_n(x)$.

4. Calcul d'une famille d'intégrales : Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on pose $I_{p,q} = \int_0^\pi \cos(px) \cos(qx) dx$.

- (a) Démontrer que $I_{p,q} = 0$ si $p \neq q$.
- (b) Calculer $I_{p,p}$.

5. Etude d'une base orthogonale :

- (a) A l'aide d'un changement de variable, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(T_0, T_1, \dots, T_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. Cette base est-elle orthonormale?
- (b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme T_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
- (c) En utilisant un résultat du cours, donner une expression de X^n en fonction des polynômes de la base orthogonale $(T_0, T_1, \dots, T_n)$.
- (d) A l'aide du calcul de $\langle T_n - 2^{n-1}X^n, T_n \rangle$, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\langle X^n, T_n \rangle = \frac{\|T_n\|^2}{2^{n-1}}$.