

1 On a $X \in [0, 1]$ ou $X \geq 1$. Dans le premier cas, on a $0 \leq X^k \leq 1$ d'où $0 \leq X^k \leq 1 + X^n$ et dans le second cas, on a $X^k \leq X^n$ d'où $0 \leq X^k \leq 1 + X^n$. Finalement, on a toujours :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, 0 \leq X^k \leq 1 + X^n.$$

2 C'est un résultat de cours : Si $0 \leq Z_1 \leq Z_2$ et si Z_2 admet une espérance, alors, Z_1 admet une espérance. Ainsi, si X^n admet une espérance, alors, $1 + X^n$ admet également une espérance, donc, la question précédente permet d'affirmer que X^k aussi. Finalement :

$$\text{Si } X^n \text{ admet une espérance, alors, } X^k \text{ admet une espérance pour tout } k \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

3.a Supposons la fonction M_X connue. Celle-ci est alors de classe C^∞ sur $] - R_X, R_X[$ en tant que somme d'une série entière de rayon R_X et on trouve, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\forall t \in] - R_X, R_X[, M_X^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{+\infty} m_n(X) \frac{t^{n-k}}{(n-k)!}$$

En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $M_X^{(k)}(0) = m_k(X)$, d'où :

$$\text{La connaissance de } M_X \text{ permet de déterminer de manière unique la suite } (m_n(X))_{n \in \mathbb{N}}.$$

3.b D'après le théorème de transfert, la variable e^{tX} admettra une espérance si et seulement si la série $\sum_{n \geq 0} e^{tx_n} P(X = x_n)$ converge absolument. Or :

$$\sum_{n \geq 0} e^{tx_n} P(X = x_n) = \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k x_n^k}{k!} P(X = x_n) \quad (*)$$

On peut donc poser, pour se ramener au résultat du préambule : $\forall (n, k) \in \mathbb{N}^2, u_{n,k} = \frac{t^k x_n^k}{k!} P(X = x_n)$. On a :

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n \geq 0} |u_{n,k}| = \frac{|t|^k}{k!} \sum_{n \geq 0} x_n^k P(X = x_n) = \frac{|t|^k}{k!} m_k(X)$ est convergente car $t \in] - R_X, R_X[$.
- La série $\sum_{k \geq 0} \frac{|t|^k}{k!} m_k(X)$ est convergente car on reconnaît $M_X(|t|)$ avec $t \in] - R_X, R_X[$.

Il est donc possible d'utiliser le préambule pour dire d'une part que la série (*) est convergente, c'est-à-dire :

$$e^{tX} \text{ admet une espérance}$$

et d'autre part que, d'après Fubini :

$$E(e^{tX}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^k x_n^k}{k!} P(X = x_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^k P(X = x_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} m_k(X)$$

c'est-à-dire :

$$\forall t \in] - R_X, R_X[, M_X(t) = E(e^{tX})$$

3.c Supposons réciproquement qu'il existe $R > 0$ tel que pour tout $t \in] - R, R[$, la variable aléatoire e^{tX} admet une espérance. La série (*) étudiée dans la question précédente converge donc (absolument) et tout le raisonnement mené permet d'affirmer que $M_X(t)$ existe. En particulier :

$$M_X \text{ est au moins définie sur }] - R, R[$$

et

$$\forall t \in] - R, R[, M_X(t) = E(e^{tX})$$

3.d

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on peut écrire :

$$(X + Y)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} X^k Y^{p-k}$$

Comme les variables X et Y sont indépendantes, il en est de même des variables X^k et Y^{p-k} . D'autre part, puisque les produits $X^k Y^{p-k}$ admettent tous une espérance (par exemple, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz) et on peut écrire :

$$m_p(X + Y) = \mathbb{E}((X + Y)^p) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \mathbb{E}(X^k) \mathbb{E}(Y^{p-k}) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} m_k(X) m_{p-k}(Y)$$

Nous venons donc déjà de prouver que :

$$(X + Y \text{ admet des moments à tout ordre.})$$

Considérons maintenant un réel t tel que $|t| < \min(R_X, R_Y)$. Les deux séries $M_X(t)$ et $M_Y(t)$ convergent et on trouve :

$$\begin{aligned} M_X(t) \times M_Y(t) &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{m_n(X)}{n!} t^n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{m_n(Y)}{n!} t^n \right) \\ &\stackrel{\text{produit de Cauchy}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{m_k(X)}{k!} \times \frac{m_{n-k}(Y)}{(n-k)!} \right) t^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} m_k(X) m_{n-k}(Y) \right) \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} m_n(X + Y) \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

Nous venons donc d'établir que :

$$(\forall |t| < \min(R_X, R_Y), M_{X+Y}(t) = M_X(t) \times M_Y(t))$$

4.a.i

Par croissances comparées, on peut dire que : $\forall p \in \mathbb{N}, n^p \mathbb{P}(Z = n) = n^p e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Par comparaison de séries à termes positifs, on peut donc affirmer que :

$$(Z \text{ admet des moments de tous ordres.})$$

$$\forall p \in \mathbb{N}, m_p(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^p e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

4.a.ii

Soit $t \in \mathbb{R}$. Il s'agit de s'intéresser à la série suivante :

$$\sum_{n \geq 0} m_n(Z) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} k^n \mathbb{P}(Z = k) \right) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} k^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{t^n}{n!} \quad (**)$$

L'énoncé nous invite à utiliser le préambule. Posons, pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$: $u_{n,k} = k^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{t^n}{n!}$. On a :

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n \geq 0} |u_{n,k}| = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \sum_{n \geq 0} \frac{(k|t|)^n}{n!}$ converge et a pour somme $e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{k|t|}$.
- La série $\sum_{k \geq 0} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{k|t|} = e^{-\lambda} \sum_{k \geq 0} \frac{(\lambda e^{|t|})^k}{k!}$ converge et a pour somme $e^{-\lambda} e^{\lambda e^{|t|}}$.

Le préambule donne donc la convergence de la série (**) pour tout $t \in \mathbb{R}$ et l'égalité de Fubini permet d'écrire :

$$M_Z(t) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(kt)^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{kt} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t}$$

En conclusion :

$$(\forall t \in \mathbb{R}, M_Z(t) = e^{\lambda(e^t - 1)})$$

4.a.iii

D'après la question **3.a**, on peut dire que $m_1(Z) = M'_Z(0)$ et $m_2(Z) = M''_Z(0)$. Or, on trouve, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$M'_Z(t) = \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)}$$

$$M''_Z(t) = (\lambda e^t + \lambda^2 e^{2t}) e^{\lambda(e^t-1)}$$

On peut donc conclure :

$$m_1(Z) = \lambda$$

$$m_2(Z) = \lambda + \lambda^2$$

4.b.i

S_n est la somme de n variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre $\frac{\lambda}{n}$, d'où :

$$S_n \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$$

4.b.ii

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a $X_i(\Omega) = \{0, 1\}$, d'où : $\forall p \in \mathbb{N}^*, m_p(X_i) = 0^p \times \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) + 1^p \times \frac{\lambda}{n} = \frac{\lambda}{n}$.

On en déduit, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$: $\forall t \in \mathbb{R}, M_{X_i}(t) = m_0(X_i) + \sum_{p=1}^{+\infty} m_p(X_i) \frac{t^p}{p!} = 1 + \frac{\lambda}{n} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{t^p}{p!}$, ce qui donne :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall t \in \mathbb{R}, M_{X_i}(t) = 1 + \frac{\lambda}{n} e^t - \frac{\lambda}{n}$$

En utilisant alors la question **3.d**, généralisée à n variables en utilisant l'indépendance des variables X_i :

$$\forall t \in \mathbb{R}, M_{S_n}(t) = \left(1 + \frac{\lambda}{n} e^t - \frac{\lambda}{n}\right)^n$$

4.b.iii

En passant à l'exponentielle, et en utilisant l'équivalent classique $\ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$, on déduit :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} M_{S_n}(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$$

4.c.i

On a $Y_n(\Omega) = \left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}\right\}$, d'où, pour tout $p \geq 1$, le théorème de transfert permet d'écrire :

$$m_p(Y_n) = \left(\frac{1}{n}\right)^p \times \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^p \times \frac{1}{n} + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^p \times \frac{1}{n}$$

Autrement dit :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, m_p(Y_n) = \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}}$$

4.c.ii

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on peut écrire :

$$M_{Y_n}(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} m_p(Y_n) \frac{t^p}{p!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} \times \frac{t^p}{p!}$$

Par linéarité de la somme (en ne faisant apparaître que des sommes de séries convergentes) :

$$M_{Y_n}(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{kt}{n}\right)^p}{p!} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{\frac{kt}{n}} = \frac{e^{\frac{t}{n}}}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(e^{\frac{t}{n}}\right)^j$$

Finalement :

$$\forall t \in \mathbb{R}, M_{Y_n}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ \frac{e^{\frac{t}{n}}}{n} \times \frac{1 - e^t}{1 - e^{\frac{t}{n}}} & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$$

4.c.iii

L'équivalent classique $1 - e^u \underset{u \rightarrow 0}{\sim} -u$ permet d'obtenir :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} M_{Y_n}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ \frac{e^t - 1}{t} & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$$

5.a

La fonction φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ en tant que composée de fonctions C^∞ . Par ailleurs, on trouve $\lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi(x) = 0 = \varphi(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x)$, d'où :

$$\varphi \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ et de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

5.b

Pour tout $x < 1$, on a : $\varphi'(x) = \frac{-2+x}{2(1-x)^{\frac{3}{2}}} \varphi(x) = \frac{-2+x}{2} \times \frac{\exp\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x}}\right)}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}$. Par croissances comparées (l'exponentielle tend plus vite vers 0 que la puissance en $1-x$ du dénominateur), on déduit donc :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi'(x) = 0$$

En résumé : φ est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et φ' admet une limite finie en 1, donc, d'après le théorème de prolongement du caractère C^1 , on peut dire que :

$$\varphi \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

5.c

Nous allons démontrer ce résultat par récurrence sur p .

- Le résultat est vrai au rang $p = 1$ car :

$$\forall x < 1, \varphi'(x) = \frac{-2+x}{2(1-x)^{\frac{3}{2}}} \varphi(x) = \frac{-1 - (\sqrt{1-x})^2}{2(\sqrt{1-x})^3} \exp\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x}}\right)$$

et il suffit donc de poser $P_1 = -1 - X^2$ et $Q_1 = 2X^3$.

- Supposons le résultat vrai au rang $p \geq 1$. Il existe donc deux polynômes P_p et Q_p dans $\mathbb{R}[X]$ tels que :

$$\forall x < 1, \varphi^{(p)}(x) = \frac{P_p(\sqrt{1-x})}{Q_p(\sqrt{1-x})} \exp\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x}}\right)$$

En dérivant, on obtient, pour tout $x > 1$:

$$\begin{aligned} \varphi^{(p+1)}(x) &= \left[\frac{-\frac{1}{2\sqrt{1-x}} P'_p(\sqrt{1-x}) Q_p(\sqrt{1-x}) - P_p(\sqrt{1-x}) \times \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} Q'_p(\sqrt{1-x})}{Q_p^2(\sqrt{1-x})} + \frac{P_p(\sqrt{1-x})}{Q_p(\sqrt{1-x})} \times \frac{-2+x}{2(1-x)^{\frac{3}{2}}} \right] \varphi(x) \\ &= \left[\frac{-P'_p(\sqrt{1-x}) Q_p(\sqrt{1-x}) + P_p(\sqrt{1-x}) Q'_p(\sqrt{1-x})}{2\sqrt{1-x} Q_p^2(\sqrt{1-x})} + \frac{P_p(\sqrt{1-x})}{Q_p(\sqrt{1-x})} \times \frac{-2+x}{2(1-x)^{\frac{3}{2}}} \right] \varphi(x) \\ &= \frac{P_{p+1}(\sqrt{1-x})}{Q_{p+1}(\sqrt{1-x})} \exp\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x}}\right) \end{aligned}$$

après avoir posé :

$$\begin{cases} P_{p+1} = -X^2 P'_p Q_p + X^2 P_p Q'_p - (1 + X^2) P_p Q_p \\ Q_{p+1} = 2X^3 Q_p^2 \end{cases}$$

Le résultat au rang $p+1$ est donc démontré et le principe de récurrence permet de conclure qu'il est vrai pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Autrement dit :

$$\forall p \geq 1, \exists (P_p, Q_p) \in (\mathbb{R}[X])^2, \forall x < 1, \varphi^{(p)}(x) = \frac{P_p(\sqrt{1-x})}{Q_p(\sqrt{1-x})} \exp\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x}}\right)$$

5.d

C'est encore une fois un argument de croissances comparées qui permet d'affirmer que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi^{(p)}(x) = 0$$

5.e

Nous allons démontrer ce résultat par récurrence en prouvant que φ est de classe C^p sur $\mathbb{R}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et que $\varphi^{(p)}(1) = 0$. L'initialisation à $p = 1$ résulte de la question **5.b**. Supposons le résultat vrai au rang p . La fonction $\varphi^{(p)}$ est donc continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ d'après la question **5.a**. Par ailleurs, d'après la question précédente, $\lim_{x \rightarrow 1^-} (\varphi^{(p)})'(x) = 0$, donc, d'après le théorème de prolongement du caractère C^1 , on peut affirmer que $\varphi^{(p)}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, d'où φ est de classe C^{p+1} et $\varphi^{(p+1)}(1) = 0$. L'hérédité est donc démontrée et on peut conclure :

$$\boxed{\varphi \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$$

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \varphi^{(p)}(1) = 0}$$

6.a

Utilisons le développement en série entière de l'exponentielle :

$$\forall u \in \mathbb{R}, e^u = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{u^q}{q!}$$

En appliquant ce développement en $u = \frac{-x}{\sqrt{1-x}}$ pour $x \in]-1, 1[$, on obtient :

$$\forall x \in]-1, 1[, \varphi(x) = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{1}{q!} \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x}} \right)^q = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{1}{q!} (-1)^q \frac{x^q}{(1-x)^{\frac{q}{2}}}$$

ce qui s'écrit encore :

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[, \varphi(x) = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{(-1)^q}{q!} x^q (1-x)^{-\frac{q}{2}}}$$

6.b

Le développement en série entière de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ sur $] -1, 1[$ permet d'écrire, pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\begin{aligned} (1-x)^{-\frac{q}{2}} &= 1 + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{q}{2}\right) \left(-\frac{q}{2}-1\right) \dots \left(-\frac{q}{2}-p+2\right) \left(-\frac{q}{2}-p+1\right)}{p!} (-x)^p \\ &= 1 + \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p \frac{\left(\frac{q}{2}\right) \left(\frac{q}{2}+1\right) \dots \left(\frac{q}{2}+p-2\right) \left(\frac{q}{2}+p-1\right)}{p!} (-1)^p x^p \\ &= 1 + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{q}{2}\right) \left(\frac{q}{2}+1\right) \dots \left(\frac{q}{2}+p-2\right) \left(\frac{q}{2}+p-1\right)}{p!} x^p \end{aligned}$$

Il suffit alors de remarquer que $H_0\left(\frac{q}{2}+0-1\right) = 1$ et que pour $p \geq 1$:

$$H_p\left(\frac{q}{2}+p-1\right) = \frac{\left(\frac{q}{2}+p-1\right) \left(\frac{q}{2}+p-2\right) \dots \left(\frac{q}{2}\right)}{p!}$$

pour conclure :

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[, \forall q \in \mathbb{N}^*, (1-x)^{-\frac{q}{2}} = \sum_{p=0}^{+\infty} H_p\left(\frac{q}{2}+p-1\right) x^p}$$

6.c

En combinant les résultats des questions **6.a** et **6.b**, on trouve que :

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1, 1[, \varphi(x) &= \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{(-1)^q}{q!} x^q (1-x)^{-\frac{q}{2}} \\ &= \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{(-1)^q}{q!} x^q \sum_{p=0}^{+\infty} H_p\left(\frac{q}{2}+p-1\right) x^p \\ &= \sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^q}{q!} H_p\left(\frac{q}{2}+p-1\right) x^{p+q} \end{aligned}$$

En isolant le terme correspondant à $q = 0$ qui vaut $\frac{(-1)^0}{0!}x^0(1-x)^0 = 1$, on déduit :

$$\forall x \in]-1, 1[, \varphi(x) = 1 + \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^q}{q!} H_p \left(\frac{q}{2} + p - 1 \right) x^{p+q}$$

Il reste à poser $i = q - 1$ et $j = p$ pour obtenir :

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[, \varphi(x) = 1 + \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}(x) \right)} \quad \text{avec} \quad \boxed{\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, a_{i,j}(x) = \frac{(-1)^{i+1}}{(i+1)!} H_j \left(\frac{i-1}{2} + j \right) x^{i+j+1}}$$

6.d Commençons par remarquer que, pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, on a $H_j \left(\frac{i-1}{2} + j \right) \geq 0$. En effet, dans le produit du numérateur, on a un produit de nombres dont le plus petit est $\frac{i+1}{2} \geq 0$. On trouve donc que :

$$\forall x \in]-1, 1[, \forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, |a_{i,j}(x)| = \frac{1}{(i+1)!} H_j \left(\frac{i-1}{2} + j \right) |x|^{i+j+1}$$

En reprenant alors le calcul des questions précédentes avec $\exp \left(\frac{|x|}{\sqrt{1-|x|}} \right)$, on trouve effectivement que :

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[, \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} |a_{i,j}(x)| \right) = \exp \left(\frac{|x|}{\sqrt{1-|x|}} \right) - 1}$$

6.e La question précédente nous permet d'utiliser le résultat de Fubini, et en particulier, la dernière égalité. Pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= 1 + \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{\substack{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \\ i+j=k}} a_{i,j}(x) \right) \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{\substack{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \\ i+j=k}} \frac{(-1)^{i+1}}{(i+1)!} H_j \left(\frac{i-1}{2} + j \right) x^{i+j+1} \right) \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{\substack{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \\ i+j=k}} \frac{(-1)^{i+1}}{(i+1)!} H_j \left(\frac{i-1}{2} + j \right) \right) x^{k+1} \\ &\stackrel{n=k+1}{=} 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{\substack{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \\ i+j=n-1}} \frac{(-1)^{i+1}}{(i+1)!} H_j \left(\frac{i-1}{2} + j \right) \right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{aligned}$$

après avoir posé $a_0 = 1$ et pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{\substack{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \\ i+j=n-1}} \frac{(-1)^{i+1}}{(i+1)!} H_j \left(\frac{i-1}{2} + j \right) \\ &\stackrel{i+1=n-j}{=} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-j}}{(n-j)!} H_j \left(\frac{n-j-1-1}{2} + j \right) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-j}}{(n-j)!} H_j \left(\frac{n+j}{2} - 1 \right) \end{aligned}$$

On peut donc conclure, avec les coefficients a_n précédemment définis :

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[, \varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n}$$

FIN !