

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Ce problème aborde la notion de moment dans différents contextes : moment d'une variable aléatoire réelle discrète à valeurs positives dans la partie I et moment d'une suite numérique réelle dans la partie II.

A plusieurs reprises, dans le problème, on pourra utiliser le résultat suivant.

Si une famille de nombres réels $u = (u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ vérifie simultanément :

$$(i) \quad \forall p \in \mathbb{N}, \text{ la série } \sum_{q \geq 0} |u_{p,q}| \text{ converge} \qquad (ii) \quad \text{la série } \sum_{p \geq 0} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} |u_{p,q}| \right) \text{ converge}$$

Alors, on peut écrire :

$$\begin{aligned} (iii) \quad & \forall q \in \mathbb{N}, \text{ la série } \sum_{p \geq 0} u_{p,q} \text{ converge} \\ (iv) \quad & \text{la série } \sum_{q \geq 0} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right) \text{ converge} \\ (v) \quad & \text{Egalité de Fubini : } \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} \right) = \sum_{q=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{\substack{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \\ p+q=n}} u_{p,q} \right) \end{aligned}$$

PARTIE I - Moments d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}_+^*$.

Si $p \in \mathbb{N}$, on dit que X admet un moment d'ordre p si la variable aléatoire X^p admet une espérance. On note alors $m_p(X)$, appelé *moment d'ordre p de X* , l'espérance de X^p . On remarque que $m_0(X) = 1$.

1. Justifier que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, 0 \leq X^k \leq 1 + X^n$.
2. En déduire que, si X admet un moment d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$), alors X admet des moments d'ordre k pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.
3. **Fonction génératrice des moments :** On suppose que, pour tout entier naturel non nul n , X admet un moment d'ordre n et que la série entière $\sum_{n \geq 0} m_n(X) \frac{t^n}{n!}$ admet un rayon de convergence $R_X > 0$. Pour tout

$t \in]-R_X, R_X[$, on note $M_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} m_n(X) \frac{t^n}{n!}$. La fonction M_X s'appelle la *fonction génératrice* des moments de la variable aléatoire X .

- (a) Justifier que la connaissance de la fonction M_X permet de déterminer de manière unique la suite $(m_n(X))_{n \in \mathbb{N}}$.
- (b) En utilisant le résultat du préambule, montrer que, pour tout $t \in]-R_X, R_X[$, la variable aléatoire e^{tX} admet une espérance et que $M_X(t) = E(e^{tX})$.
- (c) Montrer réciproquement que, s'il existe un réel $R > 0$ tel que, pour tout $t \in]-R, R[$, la variable aléatoire e^{tX} admet une espérance, alors l'ensemble de définition de la fonction génératrice des moments de X contient $] -R, R[$ et pour tout $t \in]-R, R[, M_X(t) = E(e^{tX})$.

On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires réelles discrètes indépendantes à valeurs strictement positives admettant des moments de tous ordres. On note R_X (respectivement R_Y) le rayon de convergence (supposé strictement positif) associé à la fonction M_X (respectivement M_Y).

- (d) Montrer que la variable aléatoire $X + Y$ admet des moments de tous ordres et que

$$\forall |t| < \min(R_X, R_Y), M_{X+Y}(t) = M_X(t) \times M_Y(t)$$

4. Exemples : Soit λ un nombre réel strictement positif fixé.

- (a) On suppose que Z est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant la loi de Poisson de paramètre λ .
- Montrer que Z admet des moments de tous ordres.
 - Démontrer, à l'aide du préambule, que la fonction génératrice des moments de Z est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, M_Z(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

- En déduire les valeurs de $m_1(Z)$ et $m_2(Z)$.
- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, X_i est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{\lambda}{n}$. On suppose que $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes et on pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.
- Quelle est la loi suivie par S_n ?
 - Calculer la fonction génératrice des moments des variables aléatoires X_i puis de S_n .
 - Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_{S_n}(t)$.
- (c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, U_n est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. On pose $Y_n = \frac{1}{n} U_n$.
- Donner l'expression de $m_p(Y_n)$ pour tout $p \geq 1$.
 - Calculer la fonction génératrice des moments de la variable aléatoire Y_n .
 - Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} M_{Y_n}(t)$.

PARTIE II - Moments d'une suite numérique

Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle telle que, pour tout entier naturel p , la série $\sum_{n \geq 0} n^p a_n$ converge absolument, on appelle

moment d'ordre p de la suite (a_n) le nombre $\sum_{n=0}^{+\infty} n^p a_n$. Le but de cette partie est de construire une suite non nulle dont tous les moments d'ordre p ($p \in \mathbb{N}$) sont nuls.

5. Etude d'une fonction : On définit la fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty, 1[, & \varphi(x) = \exp\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x}}\right) \\ \forall x \in [1, +\infty[, & \varphi(x) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

- (a) Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- (b) Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \varphi'(x)$ et démontrer que φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
- (c) Montrer que, pour tout entier naturel non nul p , il existe deux polynômes P_p et Q_p à coefficients réels tels que, pour tout $x \in]-\infty, 1[$,

$$\varphi^{(p)}(x) = \frac{P_p(\sqrt{1-x})}{Q_p(\sqrt{1-x})} \exp\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x}}\right)$$

- (d) En déduire $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \varphi^{(p)}(x)$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.
- (e) En déduire que φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et pour $p \in \mathbb{N}^*$, donner la valeur de $\varphi^{(p)}(1)$.

6. Développement en série :

- (a) Démontrer, pour tout $x \in]-1, 1[$: $\varphi(x) = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{(-1)^q}{q!} x^q (1-x)^{-\frac{q}{2}}$.

On considère les polynômes de Hilbert définis par :

$$\begin{cases} H_0(X) = 1 \\ H_n(X) = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (X - k) = \frac{X(X-1) \cdots (X-n+1)}{n!} \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* \quad (2)$$

- (b) Démontrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$ et tout $q \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$(1-x)^{-\frac{q}{2}} = \sum_{p=0}^{+\infty} H_p\left(\frac{q}{2} + p - 1\right) x^p$$

(c) En déduire : $\forall x \in]-1, 1[$, $\varphi(x) = 1 + \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}(x) \right)$ où l'on a posé

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, a_{i,j}(x) = \frac{(-1)^{i+1}}{(i+1)!} H_j \left(\frac{i-1}{2} + j \right) x^{i+j+1}$$

(d) Démontrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$, on a :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} |a_{i,j}(x)| \right) = \exp \left(\frac{|x|}{\sqrt{1-|x|}} \right) - 1$$

(e) Utiliser les résultats admis dans le préambule pour établir l'égalité : $\forall x \in]-1, 1[$, $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ où :

$$a_0 = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} H_k \left(\frac{n+k}{2} - 1 \right)$$