

PROBLEME

1 Pour tout $x \in]-1, 1[$, la suite $(x^n)_{n \geq 1}$ tend vers 0, donc :

La suite de fonctions $(v_n)_{n \geq 1}$ CVS vers la fonction nulle.

2 On trouve, pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \in [0, 1[$: $v'_n(x) = \frac{nx^{n-1}}{(1-x^n)^2} \geq 0$.

On en déduit que $\|v_n\|_\infty^{[0,1[} = \lim_{x \rightarrow 1^-} v_n(x) = +\infty$, de sorte que :

$(v_n)_{n \geq 1}$ ne converge pas uniformément sur $[0, 1[$.

Considérons un réel $a \in]0, 1[$. On trouve $\|v_n\|_\infty^{[0,a]} = v_n(a) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et on peut conclure :

Pour tout $a \in [0, 1[$, $(v_n)_{n \geq 1}$ CVU sur $[0, a]$.

3 Soit $x \in]-1, 1[$. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0$, donc $\left| a_n \frac{x^n}{1-x^n} \right| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |a_n x^n|$. Or, la série $\sum a_n x^n$ converge absolument car la série entière associée a pour rayon de convergence 1. Par comparaison de séries à termes positifs, on déduit donc que la série $\sum a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ converge absolument, donc, converge. Finalement :

La série de fonctions $\sum a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ CVS sur $] -1, 1[$.

4.a Utilisons la définition du rayon de convergence. Pour tout $\rho \geq 0$, la suite $(a_{2n} \rho^{2n})_{n \geq 1}$ est bornée. Par ailleurs, la suite $(a_{2n+1} \rho^{2n+1})_{n \geq 0} = \left(\frac{(-1)^n}{n+1} \rho^{2n+1} \right)_{n \geq 0}$ sera bornée si et seulement si $\rho \leq 1$. On en déduit que la suite $(a_n \rho^n)_{n \geq 1}$ est bornée si et seulement si $\rho \leq 1$, ce qui permet de conclure :

Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ vaut 1.

4.b La série de fonctions étudiée a pour somme $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \times \frac{x^{2k+1}}{1-x^{2k+1}}$. En $x = -1$, il s'agit donc de la série :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \times \frac{(-1)^{2k+1}}{1-(-1)^{2k+1}} = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

qui converge d'après le critère spécial des séries alternées. Ainsi :

Il existe $x_0 \notin]-1, 1[$ en lequel L_a converge.

5 Notons f_n le terme général de la série de fonctions. On trouve, comme dans la question 2, que $f'_n(x) = a_n \frac{nx^{n-1}}{(1-x^n)^2}$.

En discutant suivant la parité de n , on obtient $\|f_n\|_\infty^{[-b,b]} = |f_n(b)|$. La convergence absolue obtenue dans la question 3 permet donc de dire que la série $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_\infty^{[-b,b]}$ converge, ce qui prouve la convergence normale de la série de fonctions

$\sum f_n$ sur $[-b, b]$ et permet de conclure :

La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ CVU sur tout segment $[-b, b]$ inclus dans l'intervalle $] -1, 1[$.

6.a

Avec les notations de la question 5, on peut dire que toutes les fonctions f_n sont continues sur $] - 1, 1[$. Par ailleurs, la série de fonctions $\sum f_n$ CVN sur tout segment $[-b, b]$ contenu dans $] - 1, 1[$, donc, sur tout segment $[\alpha, \beta]$ de $] - 1, 1[$ (car un segment $[\alpha, \beta]$ est toujours contenu dans un segment de la forme $[-b, b]$). Le cours permet donc de conclure que :

La fonction f est continue sur $] - 1, 1[$.

6.b

Toutes les fonctions f_n sont de classe C^1 sur $] - 1, 1[$ et on trouve :

$$\forall n \geq 1, \forall x \in] - 1, 1[, f'_n(x) = a_n \frac{nx^{n-1}}{(1-x^n)^2}$$

Par ailleurs, la série de fonctions $\sum f_n$ CVS sur $] - 1, 1[$ d'après la question 3. Enfin, si $b \in [0, 1[$, on trouve, pour tout $x \in [-b, b]$ que $1 - x^n \geq 1 - b^n > 0$, de sorte que :

$$\forall n \geq 1, \forall x \in [-b, b], |f'_n(x)| \leq \frac{n|a_n|b^{n-1}}{(1-b^n)^2}$$

ce qui entraîne la majoration $\|f'_n\|_{\infty}^{[-b, b]} \leq \frac{n|a_n|b^{n-1}}{(1-b^n)^2}$. Or, le terme majorant vérifie $\frac{n|a_n|b^{n-1}}{(1-b^n)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n|a_n|b^{n-1}$, terme général d'une série convergente (car la série dérivée $\sum na_n x^{n-1}$ a aussi pour rayon de convergence 1). On peut donc conclure :

La fonction f est de classe C^1 sur $] - 1, 1[$.

$$\forall x \in] - 1, 1[, f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n \frac{x^{n-1}}{(1-x^n)^2}$$

7

Vérifions les deux points de la définition de l'énoncé :

- Pour tout $n \geq 1$, on a $\sum_{p \geq 1} |u_{n,p}| = |a_n| \sum_{p \geq 1} (|x|^n)^p$. On reconnaît un multiple de la série géométrique de raison

$|x|^n < 1$, qui est donc une série convergente, de somme $|a_n| \frac{|x|^n}{1 - |x|^n}$.

- La série $\sum_{n \geq 1} \left(\sum_{p=1}^{+\infty} |u_{n,p}| \right) = \sum_{n \geq 1} |a_n| \frac{|x|^n}{1 - |x|^n}$ est convergente car son terme général est équivalent à $|a_n| \cdot |x|^n$ et que la série entière $\sum a_n x^n$ a pour rayon de convergence 1.

Finalement :

Pour tout $x \in] - 1, 1[$, la suite double $(a_n x^{np})_{(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.

8

Soit $x \in] - 1, 1[$. D'après la propriété admise, appliquée avec la suite double sommable $(a_n x^{np})_{(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2}$, on peut écrire :

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{p=1}^{+\infty} a_n x^{np} \right)}_{S_1} = \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{(k,p) \in I_n} a_k x^{kp} \right)}_{S_2} \quad \text{où } I_n = \{(k,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, kp = n\}$$

Or, le terme du membre de gauche n'est autre que :

$$S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left(\sum_{p=1}^{+\infty} (x^n)^p \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1 - x^n}$$

et celui de droite :

$$S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{(k,p) \in I_n} a_k \right) x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k|n} a_k \right) x^n$$

On a donc bien, comme annoncé :

$$\text{Pour tout } x \in] - 1, 1[, \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1 - x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n \text{ où } b_n = \sum_{d|n} a_d$$

9.a Les diviseurs de 12 sont : 1, 2, 3, 4, 6 et 12, d'où :

$$d_{12} = 6$$

9.b La série $\sum_{n \geq 1} a_n x^n = \sum_{n \geq 1} x^n$ est une série géométrique dont le rayon de convergence vaut 1 :

Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ vaut 1.

9.c D'après la question 8, on peut écrire, pour tout $x \in]-1, 1[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$ où :

$$b_n = \sum_{d|n} a_d = \sum_{d|n} 1 = d_n$$

Ainsi :

$$\forall x \in]-1, 1[, f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n x^n.$$

10.a Le tableau attendu est le suivant :

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\varphi(k)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4

10.b Il est facile de constater que $1 \leq \varphi(n) \leq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En notant R_1 , R_2 et R_3 les rayons de convergence respectifs des trois séries entières $\sum x^n$, $\sum \varphi(n)x^n$ et $\sum nx^n$, on déduit donc que $R_1 \geq R_2 \geq R_3$. Or, d'après le cours, on a $R_1 = R_3 = 1$, donc :

Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} \varphi(n)x^n$ vaut 1.

10.c Il s'agit de vérifier que $12 = \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(4) + \varphi(6) + \varphi(12)$, ce qui est bien le cas !

10.d En combinant les résultats des questions 8 et 10.c, on obtient, pour tout $x \in]-1, 1[$: $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$ où :

$$b_n = \sum_{d|n} \varphi(d) = n$$

On obtient donc $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = x \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$ et on reconnaît la dérivée de la série géométrique $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

Finalement :

$$\forall x \in]-1, 1[, g(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

11.a Pour tout $x \in]-1, 1[\setminus \{0\}$, on peut écrire :

$$\frac{f(x)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n-1}}{1-x^n}$$

Introduisons les fonctions $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n-1}}{1-x^n}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n(x) = \frac{x^{n-1}}{1-x^n}$.

Il est facile de voir que toutes les fonctions $(-1)^n g_n$ sont continues sur $] -1, 1[$. Par ailleurs, si on se place sur un segment de la forme $[-b, b]$ (avec $b \in [0, 1[$), on obtient :

$$\forall n \geq 1, \forall x \in [-b, b], |g_n(x)| \leq \frac{b^{n-1}}{1-b^n}$$

ce qui entraîne :

$$\forall n \geq 1, \|g_n\|_{\infty}^{[-b,b]} \leq \frac{b^{n-1}}{1-b^n}$$

Or, le terme majorant est celui d'une série convergente (car équivalent à b^{n-1}), d'où la CVN de la série $\sum g_n$ sur tout segment $[-b, b]$ de $] -1, 1[$. La fonction g est donc continue sur $] -1, 1[$, ce qui permet de conclure :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0)$$

soit encore :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = -1$$

11.b

C'est une conséquence directe de la question précédente :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x$$

11.c

D'après la question 6, la fonction f est de classe C^1 sur $] -1, 1[$. En particulier, puisque $f(0) = 0$ dans l'exemple étudié dans cette question, on déduit :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = a_1 = -1$$

On retrouve bien ce qui précède.

12.a

C'est du cours :

$$\forall x \in] -1, 1[, \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

12.b

Remarquons que la série précédente converge encore lorsque $x = 1$ d'après le critère spécial des séries alternées. En notant respectivement S_n , S et R_n la somme partielle d'ordre n , la somme, et le reste d'ordre n de cette série, on peut écrire :

$$\forall n \geq 1, \forall x \in [0, 1], |S_n(x) - S(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \right| = |R_n(x)| \underset{\text{CCSA}}{\leq} \frac{1}{n+1+x} \leq \frac{1}{n+1}$$

Il en résulte que $\|S_n - S\|_{\infty}^{[0,1]} \leq \frac{1}{n+1}$ de sorte que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|S_n - S\|_{\infty}^{[0,1]} = 0$. On peut donc conclure :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \text{ CVU sur } [0, 1]$$

12.c

Appliquons le théorème de la double limite en la borne $a = 1$. Chacune des fonctions $x \mapsto \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ tend vers $\ell_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ en a , et la convergence est uniforme sur $[0, 1]$, donc, on peut écrire :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \ell_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

On peut donc conclure :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$$

13.a On a la formule classique, pour $x \neq 1$: $1 + x + \dots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$. Les deux membres étant non nuls, on peut passer à l'inverse pour obtenir :

$$\forall x \in]0, 1[, \frac{1-x}{1-x^n} = \frac{1}{1+x+\dots+x^{n-1}}$$

13.b La série étudiée est alternée vu que $x \geq 0$. Par ailleurs :

- La suite $(v_n(x))_{n \geq 1}$ tend vers 0. C'est clair si $x = 0$ ou si $x = 1$ et si $x \in]0, 1[$, l'écriture $v_n(x) = \frac{(1-x)x^n}{1-x^n}$ permet de le vérifier facilement.
- La suite $(v_n(x))_{n \geq 1}$ est décroissante. Là encore, c'est clair si $x = 0$ ou $x = 1$, et si $x \in]0, 1[$, on le vérifie grâce aux égalités suivantes :

$$\begin{aligned} v_{n+1}(x) - v_n(x) &= \frac{(1-x)x^{n+1}}{1-x^{n+1}} - \frac{(1-x)x^n}{1-x^n} = (1-x) \frac{x^{n+1}(1-x^n) - x^n(1-x^{n+1})}{(1-x^n)(1-x^{n+1})} \\ &= (1-x) \frac{x^n(x-1)}{(1-x^n)(1-x^{n+1})} \leq 0 \end{aligned}$$

Le critère spécial des séries alternées permet donc d'affirmer que la série de fonctions $\sum (-1)^n v_n$ CVS sur $[0, 1]$. Par ailleurs :

$$\forall n \geq 1, \forall x \in [0, 1], |S_n(x) - S(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k v_k(x) \right| = |R_n(x)| \underset{\text{CCSA}}{\leq} v_{n+1}(x)$$

Avec l'inégalité arithmético-géométrique, appliquée avec $x_1 = 1, x_2 = x, \dots, x_n = x^{n-1}$, on déduit :

$$\sqrt[n]{x^{0+1+\dots+(n-1)}} \leq \frac{1+x+\dots+x^{n-1}}{n} \iff \sqrt[n]{x^{\frac{(n-1)n}{2}}} \leq \frac{1+x+\dots+x^{n-1}}{n} \iff x^{\frac{n-1}{2}} \leq \frac{1+x+\dots+x^{n-1}}{n}$$

On déduit donc :

$$\forall n \geq 1, \forall x \in [0, 1], |S_n(x) - S(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{1+x+\dots+x^n} \leq x^{n+1} \times \frac{x^{-\frac{n}{2}}}{n+1} = \frac{x^{1+\frac{n}{2}}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

Il en résulte que $\|S_n - S\|_{\infty}^{[0,1]} \leq \frac{1}{n+1}$ de sorte que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|S_n - S\|_{\infty}^{[0,1]} = 0$. On peut donc conclure :

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^n v_n \text{ CVU sur } [0, 1]$$

13.c On trouve tout d'abord :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(1-x)x^n}{1-x^n} \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n v_n(x)$$

Or, la série de fonctions $\sum (-1)^n v_n$ CVU sur $[0, 1]$. Par ailleurs, pour tout $n \geq 1$, on a $\lim_{x \rightarrow 1^-} (-1)^n v_n(x) = \frac{(-1)^n}{n} = \ell_n$, donc, d'après le théorème de la double limite, on déduit :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ell_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

et la question **12.c** permet de conclure :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)f(x) = -\ln(2)$$

13.d On déduit de la question précédente que :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{-\ln(2)}{1-x}$$

EXERCICE

a) On a $\left| \frac{n-1}{n^2+1} \right| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, donc, la série étudiée a le même rayon de convergence que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} z^n$, c'est-à-dire :

$$R_a = 1$$

b) Appliquons la règle de d'Alembert pour les séries entières. On trouve :

$$\frac{\left| \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} \right|}{\left| \frac{(2n)!}{(n!)^2} \right|} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 4$$

On en déduit :

$$R_b = \frac{1}{4}$$

c) Utilisons la définition du rayon de convergence. Pour tout $\rho \geq 0$, la suite $(\ln(n)\rho^n)_{n \geq 1}$ est bornée si et seulement si $\rho < 1$, d'où :

$$R_c = 1$$

d) Appliquons la règle de d'Alembert pour les séries numériques. On trouve, pour $z \neq 0$:

$$\frac{\left| \frac{(n+1)^{n+1} z^{3(n+1)}}{(n+1)!} \right|}{\left| \frac{n^n z^{3n}}{n!} \right|} = \left(\frac{n+1}{n} \right)^n |z|^3 = e^{n \ln(1+\frac{1}{n})} |z|^3 \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} e |z|^3$$

Si $e|z|^3 < 1$, la série converge donc absolument, et si $e|z|^3 > 1$, la série diverge grossièrement. On en déduit :

$$R_d = \frac{1}{e^{\frac{1}{3}}}$$

e) On a $|\text{ch}(n)| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^n}{2}$, donc, la série étudiée a le même rayon de convergence que $\sum_{n \geq 1} \frac{e^n}{2} z^n$, c'est-à-dire, par exemple avec la règle de d'Alembert :

$$R_e = \frac{1}{e}$$

FIN !