

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Ce sujet est constitué d'un problème et d'un exercice qui sont indépendants.

PROBLEME

Dans ce sujet, on s'intéresse à des séries de fonctions L_a de la forme $\sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ où $(a_n)_{n \geq 1}$ est une suite de réels telle que la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ soit de rayon 1.

PARTIE I - Etude d'une suite de fonctions

On pose, pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \in]-1, 1[$, $v_n(x) = \frac{x^n}{1-x^n}$.

1. Etudier la CVS sur $] -1, 1[$ de la suite de fonctions $(v_n)_{n \geq 1}$.
2. Etudier la CVU sur $[0, 1[$ de la suite de fonctions $(v_n)_{n \geq 1}$. Reprendre cette étude sur $[0, a]$ où $a \in]0, 1[$.

PARTIE II - Premières propriétés de L_a

3. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ CVS sur $] -1, 1[$.
4. On considère, dans cet exemple uniquement, la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, a_{2k} = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N}, a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{k+1}$$

- (a) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$? Justifier la réponse.
 - (b) Démontrer que la série L_a converge pour au moins un x_0 n'appartenant pas à $] -1, 1[$.
5. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ CVU sur tout segment $[-b, b]$ inclus dans l'intervalle $] -1, 1[$.
 6. On pose, pour tout $x \in]-1, 1[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$.
 - (a) Démontrer que la fonction f est continue sur l'intervalle $] -1, 1[$.
 - (b) Démontrer que la fonction f est de classe C^1 sur l'intervalle $] -1, 1[$.

PARTIE III - Expression sous forme de série entière

On dit qu'une suite double de réels $u = (u_{n,p})_{(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable si on a simultanément :

$$(i) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ la série } \sum_{p \geq 1} |u_{n,p}| \text{ converge} \qquad (ii) \quad \text{la série } \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{p=1}^{+\infty} |u_{n,p}| \right) \text{ converge}$$

7. Démontrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$, la suite double $(a_n x^{np})_{(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.

On admettra que, si $u = (u_{n,p})_{(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable, on peut écrire :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{(k,p) \in I_n} u_{k,p} \right) \quad \text{où } I_n = \{(k,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, kp = n\}$$

8. En déduire que pour tout $x \in]-1, 1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$ où $b_n = \sum_{d|n} a_d$.

On rappelle que $d|n$ signifie que d divise n . Par exemple, $b_6 = a_1 + a_2 + a_3 + a_6$.

9. **Un premier exemple :** On suppose dans cette question que $a_n = 1$ pour tout $n \geq 1$, et on note d_n le nombre de diviseurs de n .

(a) Calculer d_{12} .

(b) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$?

(c) Exprimer, pour tout $x \in]-1, 1[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ comme la somme d'une série entière.

10. **Un second exemple :** On suppose dans cette question que $a_n = \varphi(n)$ pour tout $n \geq 1$ où $\varphi(n)$ désigne le nombre d'entiers naturels premiers avec n et inférieurs ou égaux à n .

(a) Compléter un tableau indiquant les valeurs de $\varphi(k)$ pour tout $k \in \llbracket 1, 12 \rrbracket$.

(b) A l'aide d'un encadrement de a_n , calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

(c) On admet que, pour $n \geq 1$, $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$. Vérifier ce résultat pour $n = 12$.

(d) Exprimer, pour tout $x \in]-1, 1[$, $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ sous la forme d'un quotient de deux polynômes.

PARTIE IV - Etude d'un cas particulier

Dans cette partie, on suppose que $a_n = (-1)^n$ pour tout $n \geq 1$ et on pose : $\forall x \in]-1, 1[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$.

11. **Un équivalent de f en 0**

(a) A l'aide d'un argument de continuité, calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.

(b) En déduire un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.

(c) Retrouver le résultat de la question précédente en utilisant le résultat de la question 6.

12. **Une question intermédiaire**

(a) Rappeler l'expression de $\ln(1+x)$ à l'aide de la somme d'une série entière lorsque $x \in]-1, 1[$.

(b) Démontrer que la convergence de cette série est uniforme sur $[0, 1]$.

(c) En déduire, à l'aide du théorème de la double limite, la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

13. **Un équivalent de f en 1**

(a) Démontrer que $\forall x \in]0, 1[$, $\frac{1-x}{1-x^n} = \frac{1}{1+x+x^2+\dots+x^{n-1}}$.

(b) Pour tout $x \in [0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n(x) = \frac{x^n}{1+x+\dots+x^{n-1}}$. Etablir la CVU de la série de fonctions $\sum (-1)^n v_n$ sur $[0, 1]$. On pourra aussi utiliser l'inégalité arithmético-géométrique, sans la démontrer :

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

(c) En déduire, à l'aide de la question 12 la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)f(x)$.

(d) En déduire un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers 1^- .

EXERCICE : Calculs de rayons de convergence

Calculer le rayon de convergence de chacune des cinq séries entières suivantes :

a) $\sum_{n \geq 0} \frac{n-1}{n^2+1} z^n$

b) $\sum_{n \geq 0} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$

c) $\sum_{n \geq 1} \ln(n) z^n$

d) $\sum_{n \geq 0} \frac{n^n}{n!} z^{3n}$

e) $\sum_{n \geq 0} \text{ch}(n) z^n$