

PROBLEME

1 La formule permet d'obtenir $L(f) = \int_0^1 \sqrt{1+t} dt = \sqrt{2}$. On retrouve bien la longueur géométrique de la diagonale d'un carré de côté 1.

2 La dérivée de la fonction ch est sh et l'égalité $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$ permet d'obtenir :

$$L(f) = \int_0^1 \sqrt{1 + \text{sh}^2(t)} dt = \int_0^1 \sqrt{\text{ch}^2(t)} dt = \int_0^1 |\text{ch}(t)| dt = \int_0^1 \text{ch}(t) dt = [\text{sh}(t)]_0^1 = \text{sh}(1)$$

Finalement :

$$L(f) = \text{sh}(1)$$

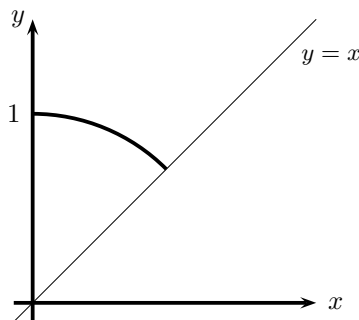
3.a La formule permet d'obtenir :

$$L(f) = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{1 + \left(\frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}\right)^2} dt = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = [\text{Arcsin}(t)]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \text{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Finalement :

$$L(f) = \frac{\pi}{4}$$

3.b On constate que pour tout $t \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, on a l'égalité $(f(t))^2 + t^2 = 1$. La courbe représentative de la fonction proposée est donc un arc du cercle de centre 0 et de rayon 1.



Sa longueur est donc égale à un huitième de celle du cercle correspondant, soit $\frac{1}{8} \times 2\pi$. On retrouve bien le résultat de la question précédente.

4.a Intéressons nous pour commencer à la quantité $u + \sqrt{u^2 + 1}$ présente dans le logarithme. Cette dernière est strictement positive si $u \geq 0$. Si $u < 0$, elle l'est aussi car $-u = |u| = \sqrt{u^2} < \sqrt{u^2 + 1}$. La fonction φ est donc définie sur $\mathbb{R}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ car la fonction $\ln$ et la fonction $u \mapsto u + \sqrt{u^2 + 1}$ le sont, et on trouve :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \varphi'(u) = \frac{1 + \frac{2u}{2\sqrt{u^2+1}}}{u + \sqrt{u^2+1}} = \frac{\frac{\sqrt{u^2+1}+u}{\sqrt{u^2+1}}}{u + \sqrt{u^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}} > 0$$

La fonction φ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Enfin, elle tend clairement vers $+\infty$ en $+\infty$ et vers $-\infty$ en $-\infty$ en utilisant ce qui suit :

$$\ln(u + \sqrt{u^2 + 1}) = \ln\left(\frac{(u + \sqrt{u^2 + 1})(u - \sqrt{u^2 + 1})}{u - \sqrt{u^2 + 1}}\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{u^2 + 1} - u}\right)$$

4.b Tout d'abord, la formule de l'énoncé permet d'obtenir : $L(f) = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2} dt$. Une intégration par parties en intégrant $t \mapsto 1$ et en dérivant $t \mapsto \sqrt{1+4t^2}$ permet d'obtenir :

$$L(f) = [t\sqrt{1+4t^2}]_0^1 - \int_0^1 t \frac{8t}{2\sqrt{1+4t^2}} dt = \sqrt{5} - \int_0^1 \frac{4t^2}{\sqrt{1+4t^2}} dt$$

Dans la dernière intégrale en présence, on peut écrire $4t^2 = 4t^2 + 1 - 1$ pour obtenir :

$$L(f) = \sqrt{5} - L(f) + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} dt$$

On peut alors utiliser la question précédente pour écrire : $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} dt = [\frac{1}{2}\varphi(2t)]_0^1 = \frac{\ln(2+\sqrt{5})}{2}$, d'où :

$$L(f) = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\ln(2+\sqrt{5})}{4}$$

5.a Si $x \in \mathbb{R}_+$, on peut écrire : $\sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{1+x^2+2x} = \sqrt{(1+x)^2} = |1+x| = 1+x$. On a donc bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \sqrt{1+x^2} \leq 1+x$$

5.b Par définition de $L(p_n)$, on peut écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\lambda_n = \int_0^1 \sqrt{1+(nt^{n-1})^2} dt$. En utilisant la question précédente, on obtient alors :

$$\lambda_n \leq \int_0^1 (1+nt^{n-1}) dt = [t+t^n]_0^1$$

ce qui s'écrit encore :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \lambda_n \leq 2$$

5.c S'il y avait égalité dans le résultat précédent, la fonction positive et continue $t \mapsto 1+nt^{n-1} - \sqrt{1+(nt^{n-1})^2}$ aurait une intégrale nulle, et serait donc nulle, ce qui n'est pas le cas. Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \lambda_n < 2$$

6.a La fonction $h : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $]0,1]$, donc, l'intégrale proposée est impropre en 0. Or, l'équivalent classique $\sin(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t$ permet de dire que la fonction h est prolongeable par continuité en 0. L'intégrale est donc faussement impropre en 0 et on peut affirmer :

$$\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} dt \text{ converge.}$$

6.b La fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et l'intégrale proposée est impropre en $+\infty$. Introduisons les fonctions u et v définies sur $[1, +\infty[$ par $u(t) = \frac{1}{t}$ et $v(t) = -\cos(t)$. Les deux fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[1, +\infty[$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ (produit d'une fonction bornée par une fonction qui tend vers 0), donc, l'intégration par parties est légitime et permet de dire que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_1^{+\infty} u(t)v'(t) dt$ est de même nature que l'intégrale $\int_1^{+\infty} u'(t)v(t) dt = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$. Or, cette dernière intégrale converge absolument grâce à la majoration $\left| \frac{\cos(t)}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$ et par comparaison d'intégrales de fonctions positives avec l'intégrale de référence $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$. On peut donc conclure :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt \text{ converge.}$$

6.c

C'est le même raisonnement que dans la question précédente avec une intégration par parties. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t} dt$ est de même nature que l'intégrale $\int_1^{+\infty} -\frac{\sin(t)}{2t^2} dt$ qui converge absolument. Ainsi :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t} dt \text{ converge.}$$

6.d

La formule $\sin^2(t) = \frac{1 - \cos(2t)}{2}$ permet d'écrire, pour tout $x \geq 1$:

$$\int_1^x \frac{\sin^2(t)}{t} dt = \int_1^x \frac{1}{2t} dt - \int_1^x \frac{\cos(2t)}{2t} dt = \frac{\ln(x)}{2} - \frac{1}{2} \int_1^x \frac{\cos(2t)}{t} dt$$

Or, dans le membre de droite, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{2} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{\cos(2t)}{t} dt = L$ (limite finie), donc, le membre de gauche tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. Cela permet de conclure que :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t} dt \text{ diverge.}$$

6.e

On déduit de l'inégalité $|\sin(t)| \geq \sin^2(t) \geq 0$ que :

$$\forall t \geq 1, \frac{|\sin(t)|}{t} \geq \frac{\sin^2(t)}{t} \geq 0$$

Or, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t} dt$ diverge d'après la question précédente, donc, par comparaison d'intégrales de fonctions positives :

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t} dt \text{ diverge.}$$

7.a

Le changement de variable $u = \frac{1}{t}$ permet d'écrire :

$$\forall x \in]0, 1], f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^1 u \sin(u) \frac{-du}{u^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\sin(u)}{u} du$$

La question **6.b** permet donc d'affirmer que f admet une limite en 0^+ . Ainsi :

$$f \text{ se prolonge en } 0 \text{ en posant } f(0) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

7.b

La fonction g est continue sur $I =]0, 1]$ et $-f$ n'est autre que la primitive de g sur I qui s'annule en 1, donc, à ce titre, on peut dire que $-f$ est continue sur $]0, 1]$. La fonction f l'est donc aussi, donc, son prolongement par continuité en 0, encote noté f est continu sur le segment $[0, 1]$. Ainsi :

$$f \text{ est continue sur } [0, 1]$$

Par le même raisonnement, puisque g est de classe C^∞ sur $]0, 1]$, il en est de même de $-f$, donc, de f :

$$f \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur }]0, 1]$$

7.c

Le même changement de variable que dans la question **7.a** permet d'écrire :

$$\forall x \in]0, 1], \int_x^1 |g(t)| dt = \int_{\frac{1}{x}}^1 |u \sin(u)| \frac{-du}{u^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{|\sin(u)|}{u} du$$

La question **6.e** permet de conclure :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^1 |g(t)| dt = +\infty$$

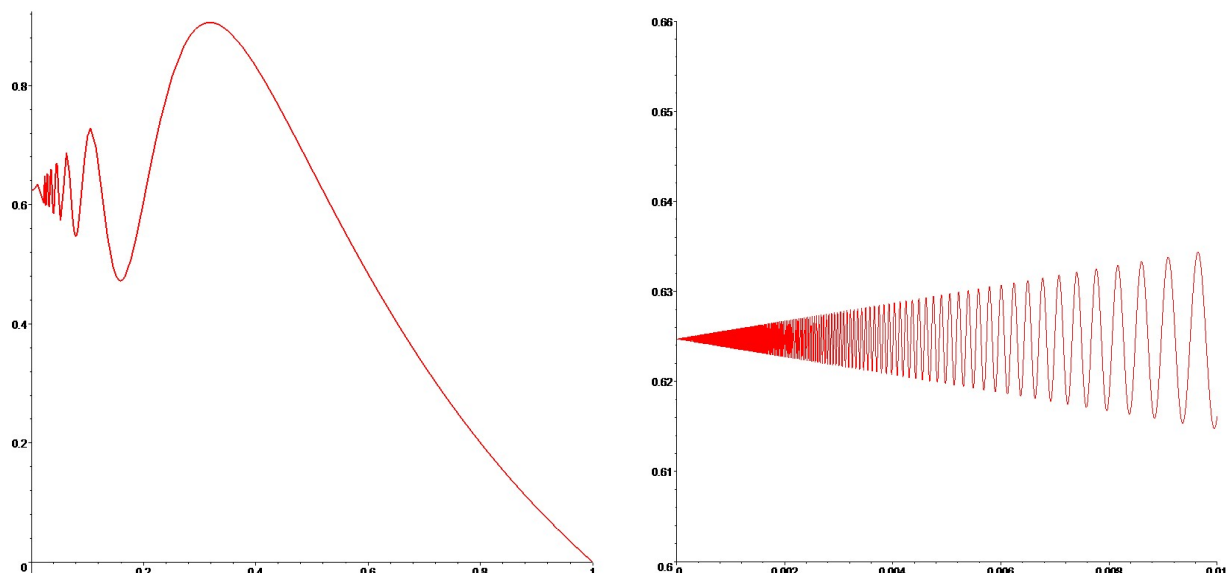
8.a Pour tout $t \in [x, 1]$, on a $f'(t) = -g(t)$, d'où :

$$\lambda(x) = \int_x^1 \sqrt{1 + (g(t))^2} dt = \int_x^1 \sqrt{1 + \frac{1}{t^2} \sin^2\left(\frac{1}{t}\right)} dt \geq \int_x^1 \sqrt{\frac{1}{t^2} \sin^2\left(\frac{1}{t}\right)} dt = \int_x^1 |g(t)| dt$$

La question précédente permet donc d'en déduire :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \lambda(x) = +\infty$$

8.b On en déduit que la courbe représentative de f sur $[0, 1]$ a une longueur infinie, bien que f soit continue sur $[0, 1]$. Pour essayer de le comprendre, on peut observer la courbe de f :



9 L'application proposée va bien de E_1 dans $\mathbb{R}_+$. La propriété d'homogénéité est vérifiée par homogénéité de la valeur absolue et de la norme infinie. De même, l'inégalité triangulaire provient essentiellement de l'inégalité triangulaire de la valeur absolue et de la norme infinie. Enfin, si $\|f\| = 0$, alors, $|f(0)| + \|f'\|_\infty = 0$, donc, les deux quantités positives $|f(0)|$ et $\|f'\|_\infty$ sont nulles. On en déduit f' est la fonction nulle, donc, que f est constante, et puisque $f(0) = 0$, la fonction f est donc nulle. La propriété de séparation est donc vérifiée. En conclusion :

$$f \mapsto \|f\| \text{ est une norme sur } E_1.$$

10 Soit $f \in E_1$. L'inégalité des accroissements finis permet d'écrire :

$$\forall x \in [0, 1], |f(x) - f(0)| \leq \|f'\|_\infty \times |x - 0| \leq \|f'\|_\infty$$

Grâce à l'inégalité triangulaire, on obtient alors :

$$\forall x \in [0, 1], |f(x)| = |f(x) - f(0) + f(0)| \leq |f(x) - f(0)| + |f(0)| \leq \|f'\|_\infty + |f(0)| = \|f\|$$

Cette inégalité étant valable pour tout $x \in [0, 1]$, on peut conclure :

$$\forall f \in E_1, \|f\|_\infty \leq \|f\|$$

11 Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que : $\forall f \in E_1, \|f\| \leq \alpha \|f\|_\infty$. En appliquant cette inégalité aux fonctions $x \mapsto x^n$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \leq \alpha$$

ce qui est impossible. En conclusion :

$$\text{Il n'existe pas de réel } \alpha > 0 \text{ tel que : } \forall f \in E_1, \|f\| \leq \alpha \|f\|_\infty$$

12.a

On peut remarquer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, 1], |f_n(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, de sorte que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

On en déduit :

(f_n) converge vers la fonction nulle au sens de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

12.b

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On trouve :

$$I_n = \int_0^1 \sqrt{1 + n\pi^2 \cos^2(n\pi t)} dt \underset{u=n\pi t}{=} \frac{1}{n\pi} \int_0^{n\pi} \sqrt{1 + n\pi^2 \cos^2(u)} du \geq \frac{1}{n\pi} \int_0^{n\pi} \sqrt{n\pi^2 \cos^2(u)} du$$

On en déduit :

$$I_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{n\pi} |\cos(u)| du = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\cos(u)| du$$

Par π -périodicité de la fonction $x \mapsto |\cos(x)|$, on déduit donc :

$$I_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi |\cos(u)| du = \sqrt{n} \int_0^\pi |\cos(u)| du = \sqrt{n} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(u) du + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (-\cos(u)) du \right]$$

Après calculs, on trouve donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n \geq 2\sqrt{n}$$

12.c

D'après la question **12.a**, la suite (f_n) tend vers 0 au sens de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Si la fonction φ était continue, on déduirait alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} L(f_n) = L(0) = 1$, ce qui n'est pas le cas d'après la question **12.b**. Finalement :

La fonction φ n'est pas continue.

13.a

Considérons deux fonctions f et g dans E_1 . On trouve :

$$L(f) - L(g) = \int_0^1 \left[\sqrt{1 + (f'(t))^2} - \sqrt{1 + (g'(t))^2} \right] dt$$

En multipliant et divisant par la quantité conjuguée, on déduit :

$$L(f) - L(g) = \int_0^1 \frac{(f'(t))^2 - (g'(t))^2}{\sqrt{1 + (f'(t))^2} + \sqrt{1 + (g'(t))^2}} dt$$

La dénominateur est minoré par 1, de sorte que :

$$\begin{aligned} |L(f) - L(g)| &\leq \int_0^1 \left| (f'(t))^2 - (g'(t))^2 \right| dt = \int_0^1 |f'(t) - g'(t)| \times [f'(t) + g'(t)] dt \\ &\leq \int_0^1 |f'(t) - g'(t)| \times [\|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty] dt \\ &\leq \int_0^1 |f'(t) - g'(t)| \times [\|f\| + \|g\|] dt \quad (\text{car } \|h'\|_\infty \leq \|h\|) \\ &\leq [\|f\| + \|g\|] \int_0^1 \|f' - g'\|_\infty dt \\ &= [\|f\| + \|g\|] \times \|f' - g'\|_\infty \end{aligned}$$

En majorant $\|f' - g'\|_\infty$ par $\|f - g\|$, on peut finalement conclure :

$$\forall (f, g) \in E_1^2, |L(f) - L(g)| \leq (\|f\| + \|g\|) \|f - g\|$$

13.b Soit $f_0 \in E_1$. Montrons la continuité de ψ en f_0 . Fixons pour cela $\varepsilon > 0$. Choisissons $f \in E_1$ tel que $\|f - f_0\| \leq \varepsilon$. On trouve :

$$\|f\| = \|f - f_0 + f_0\| \leq \|f - f_0\| + \|f_0\| \leq \varepsilon + \|f_0\|$$

donc, d'après la question précédente :

$$|L(f) - L(f_0)| \leq \underbrace{(2\|f_0\| + \varepsilon)}_{=K} \|f - f_0\| \leq K\varepsilon$$

La continuité de ψ en f_0 a donc été montrée et on peut conclure :

La fonction ψ est continue.

EXERCICE 1

1 A_1 n'est pas un fermé. En effet, la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 2}$ est une suite d'éléments de A_1 qui converge vers $0 \notin A_1$.

A_1 n'est pas non plus un ouvert car $2 \in A_1$ mais aucun intervalle ouvert de centre 2 n'est contenu dans A_1 (ça « dépasse » sur la droite!). Finalement :

A_1 n'est ni ouvert, ni fermé.

2 L'inégalité $0 < |x + 1|$ se traduit par $x \neq -1$. D'autre part, l'inégalité $|x + 1| < 1$ se traduit par $-1 < x + 1 < 1$, c'est-à-dire, par $-2 < x < 0$. L'ensemble A_2 est donc l'union des deux bandes verticales suivantes :

$$V_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -2 < x < -1\} \quad V_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -1 < x < 0\}$$

Désignons par f l'application linéaire définie par $f : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x \end{matrix}$. Puisque $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie, f est continue. On remarque alors que $V_1 = f^{-1}(]-2, -1])$ et $V_2 = f^{-1}(]-1, 0])$, donc, V_1 et V_2 sont des images réciproques d'ouverts de $\mathbb{R}$ par la fonction continue f , donc, V_1 et V_2 sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$. Ainsi, A_2 est encore un ouvert comme union de deux ouverts. En revanche, A_2 n'est pas fermé car par exemple, la suite $\left((-\frac{1}{n}, 0)\right)_{n \geq 2}$ est une suite d'éléments de A_2 qui converge vers $(0, 0)$ qui n'appartient pas à A_2 . Finalement :

A_2 est ouvert mais pas fermé.

3 A_3 est une courbe du plan, union des ensembles $W_1 = \{(x, \frac{1}{x}) \text{ où } x \in \mathbb{R}_+^*\}$ et $W_2 = \{(x, \frac{1}{x}) \text{ où } x \in \mathbb{R}_-^*\}$.

On a $\overset{\circ}{A}_3 = \emptyset$ car si (x, y) est un point de W_1 ou de W_2 , aucune boule de centre (x, y) n'est contenue dans la courbe A_3 . En revanche, si $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de A_3 qui converge vers (x, y) , alors, on tire de l'égalité $x_n y_n = 1$, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $xy = 1$ en faisant tendre n vers $+\infty$. La limite (x, y) est donc encore dans A_3 . L'ensemble A_3 est donc fermé, d'où $A_3 = \overline{A}_3$. En conclusion :

$$\overset{\circ}{A}_3 = \emptyset \quad \overline{A}_3 = A_3$$

4 Toutes les matrices $M_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 1 \\ 0 & \frac{2}{n} \end{bmatrix}$ sont diagonalisables (car possèdent chacune un polynôme caractéristique scindé et à racines simples) mais la suite $(M_n)_{n \geq 1}$ converge vers la matrice $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ qui n'est pas diagonalisable (car elle possède 0 pour unique valeur propre mais n'est pas semblable à la matrice nulle). On en déduit :

A_4 n'est pas un ensemble fermé.

5 Si A_5 était un ouvert, son complémentaire A_5^c dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ serait fermé. Or, la suite $(Q_n)_{n \geq 1}$ avec $Q_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ est une suite d'éléments de A_5^c qui converge vers $0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \notin A_5^c$. On en déduit que A_5^c n'est pas fermé, donc :

A_5 n'est pas un ensemble ouvert.

EXERCICE 2

1 • La fonction $f : x \mapsto e^{-(\ln(x))^a}$ est continue sur $[e, +\infty[$, donc, l'intégrale $I(a)$ est impropre uniquement en $+\infty$. Envisageons plusieurs cas :

- Si $a < 0$, alors, $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1$. Or, l'intégrale $\int_e^{+\infty} dx$ est bien entendu divergente, donc, par comparaison d'intégrales de fonctions positives, on déduit que $\int_e^{+\infty} f(x)dx$ est divergente.
- Si $a = 0$, alors, $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-1}$. Or, l'intégrale $\int_e^{+\infty} e^{-1}dx$ est là encore divergente, donc, par comparaison d'intégrales de fonctions positives, on déduit que $\int_e^{+\infty} f(x)dx$ est divergente.
- Si $a \in]0, 1]$, alors, $(\ln(x))^a \leq \ln(x)$ puis $f(x) \geq e^{-\ln(x)} = \frac{1}{x}$. Or, l'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ est divergente, donc, par comparaison d'intégrales de fonctions positives, on déduit que $\int_e^{+\infty} f(x)dx$ est divergente.
- Si $a > 1$, alors, $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. En effet :

$$\frac{f(x)}{\frac{1}{x^2}} = x^2 f(x) = e^{2\ln(x) - (\ln(x))^a} = e^{\ln(x)[2 - (\ln(x))^{a-1}]} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Or, l'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ est convergente, donc, par comparaison d'intégrales de fonctions positives, on déduit que $\int_e^{+\infty} f(x)dx$ est convergente. En conclusion :

$I(a)$ converge si et seulement si $a > 1$.

• La fonction $f : x \mapsto \ln\left(1 + \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} + \frac{a}{x}\right)$ est continue sur $[2, +\infty[$, donc, l'intégrale $J(a)$ est impropre uniquement en $+\infty$. On trouve :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} + \frac{a}{x} - \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} + \frac{a}{x} \right)^2 + o\left(\left(\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} + \frac{a}{x} \right)^2 \right) \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} + \left(a - \frac{\sin^2(x)}{2} \right) \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}} \right) \end{aligned}$$

Avec la formule $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$, on déduit :

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} + \frac{a - \frac{1}{4}}{x} + \frac{\cos(2x)}{4x} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}} \right)$$

Par un raisonnement similaire à celui utilisé dans le problème (intégration par parties), on démontrerait que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}dx$ converge et, toujours d'après le problème, l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x}dx$ converge également. En revanche, l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ est une intégrale de référence divergente. On en déduit :

$J(a)$ converge si et seulement si $a = \frac{1}{4}$.

2.a La fonction $f_k : x \mapsto \frac{x^k}{x^{2n} + 1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc, l'intégrale I_k est impropre uniquement en $+\infty$. On trouve $f_k(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^k}{x^{2n}} = \frac{1}{x^{2n-k}}$, donc, par comparaison d'intégrales de fonctions positives, on peut dire que I_k converge si et seulement si $2n - k > 1$, c'est-à-dire, $k < 2n - 1$. On en déduit :

$A =]0, 2n - 2]$

2.b

La première idée est de regarder si la suite $(I_k)_{k \in A}$ est monotone, mais il n'est pas facile de trouver le signe de $I_{k+1} - I_k$. En revanche, le changement de variable $u = \frac{1}{x}$ permet d'obtenir :

$$I_k = \int_{+\infty}^0 \frac{\frac{1}{u^k}}{\frac{1}{u^{2n}} + 1} \times \frac{-1}{u^2} du = \int_0^{+\infty} \frac{u^{2n-k-2}}{u^{2n} + 1} du = I_{2n-k-2}$$

On trouve donc (astucieux!) :

$$\forall k \in A, I_k = \frac{1}{2} (I_k + I_{2n-k-2}) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{x^{2n} + 1} (x^{k-n+1} + x^{n-k-1}) dx$$

En utilisant l'inégalité classique (qui se démontre avec une étude de fonctions) :

$$\forall t > 0, t + \frac{1}{t} \geq 2$$

on déduit que :

$$\forall k \in A, I_k \geq \int_0^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{x^{2n} + 1} dx = I_{n-1}$$

Reste à calculer :

$$I_{n-1} \underset{u=x^n}{=} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{n-1}{n}}}{u^2 + 1} \times \frac{1}{n} u^{\frac{1}{n}-1} du = \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2 + 1} du = \frac{1}{n} \times \frac{\pi}{2}$$

En conclusion :

$$\boxed{\min_{k \in A} I_k = \frac{\pi}{2n}}$$

FIN !