

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Ce sujet est constitué d'un problème et de deux exercices qui sont indépendants.

PROBLEME

Pour toute fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , on appelle longueur de la courbe représentative de f , le réel défini par :

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$$

PARTIE I - Quelques exemples de calculs de longueurs

1. Vérifier la formule donnant $L(f)$ pour f définie sur $[0, 1]$ par $f(t) = t$.
2. Calculer $L(f)$ pour f définie sur $[0, 1]$ par $f(t) = \text{ch}(t)$.
3. (a) Calculer $L(f)$ pour f définie sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ par $f(t) = \sqrt{1 - t^2}$.
(b) Retrouver le résultat de la question précédente sans calcul, par des considérations géométriques.
4. (a) Etudier la fonction φ définie par $\varphi(u) = \ln(u + \sqrt{u^2 + 1})$ (D_φ , variations...).
(b) Soit f définie sur $[0, 1]$ par $f(t) = t^2$. Calculer $L(f)$ en utilisant une intégration par parties.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note λ_n la longueur de la courbe de p_n définie sur $[0, 1]$ par $p_n(t) = t^n$.
(a) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \sqrt{1 + x^2} \leq 1 + x$.
(b) Dédire de l'inégalité précédente que $\lambda_n \leq 2$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
(c) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \lambda_n < 2$.

PARTIE II - Un exemple surprenant

6. Etude d'une intégrale généralisée

- (a) Démontrer que l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente.
 - (b) Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente.
 - (c) Démontrer que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t} dt$ est convergente.
 - (d) Démontrer que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t} dt$ est divergente.
 - (e) En déduire la divergence de l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t} dt$.
7. On désigne par g la fonction définie sur $]0, 1]$ par $g(t) = \frac{1}{t} \sin\left(\frac{1}{t}\right)$ et par f la fonction définie sur ce même intervalle par $f(x) = \int_x^1 g(t) dt$.
- (a) Démontrer que la fonction f se prolonge par continuité en 0. On note encore f ce prolongement.
 - (b) Démontrer que f est continue sur $[0, 1]$ et indéfiniment dérivable sur $]0, 1]$.

- (c) Démontrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^1 |g(t)| dt = +\infty$.
8. Pour tout $x \in]0, 1]$, on désigne par $\lambda(x)$ la longueur de la courbe représentative de la restriction de la fonction f au segment $[x, 1]$.
- (a) Donner une expression intégrale de $\lambda(x)$ pour tout $x \in]0, 1]$ puis montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \lambda(x) = +\infty$.
- (b) Donner une interprétation de ce résultat.

PARTIE III - Continuité de la fonction longueur

Dans toute cette partie, on pose $E_0 = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et $E_1 = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$.

Enfin, si $f \in E_1$, on pose $\|f\| = |f(0)| + \|f'\|_\infty$.

9. Démontrer que $f \mapsto \|f\|$ définit une norme sur E_1 .
10. Etablir que : $\forall f \in E_1, \|f\|_\infty \leq \|f\|$.
11. Existe-t-il $\alpha > 0$ tel que : $\forall f \in E_1, \|f\| \leq \alpha \|f\|_\infty$?
12. On considère la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de fonctions définies sur $[0, 1]$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, 1], f_n(t) = \frac{\sin(n\pi t)}{\sqrt{n}}$$

- (a) Démontrer que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge vers la fonction nulle au sens de la norme $\|\cdot\|_\infty$.
- (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = L(f_n)$. Etablir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n \geq 2\sqrt{n}$$

- (c) En déduire que l'application $\varphi : \begin{matrix} (E_1, \|\cdot\|_\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & L(f) \end{matrix}$ n'est pas continue.
13. (a) Démontrer que : $\forall (f, g) \in E_1^2, |L(f) - L(g)| \leq (\|f\| + \|g\|) \|f - g\|$
- (b) En déduire que l'application $\psi : \begin{matrix} (E_1, \|\cdot\|) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & L(f) \end{matrix}$ est continue.

EXERCICE 1 : Topologie

Les 5 questions suivantes sont indépendantes.

1. L'ensemble $A_1 =]0, 2] \setminus \{1\}$ est-il un fermé de $\mathbb{R}$? Un ouvert de $\mathbb{R}$?
2. L'ensemble $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < |x + 1| < 1\}$ est-il un fermé de $\mathbb{R}^2$? Un ouvert de $\mathbb{R}^2$?
On pourra accompagner le raisonnement d'un dessin !
3. Déterminer l'intérieur et l'adhérence de $A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy = 1\}$.
4. L'ensemble A_4 des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est-il un ensemble fermé ?
5. L'ensemble A_5 des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de trace nulle est-il ouvert ?

EXERCICE 2 : Intégrales généralisées

1. Déterminer, en fonction de $a \in \mathbb{R}$, la nature des intégrales suivantes :

$$I(a) = \int_e^{+\infty} e^{-(\ln(x))^a} dx \qquad J(a) = \int_2^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} + \frac{a}{x} \right) dx$$

2. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

- (a) Déterminer l'ensemble A constitué des entiers naturels tels que l'intégrale $I_k = \int_0^{+\infty} \frac{x^k}{x^{2n} + 1} dx$ converge.
- (b) Calculer $\min_{k \in A} I_k$.