

PC2 - DS N° 3 - Un corrigé

PROBLEME

1.a Les deux matrices A et B sont semblables, donc, il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$. La propriété du cours $\text{Tr}(MN) = \text{Tr}(NM)$ permet alors d'obtenir :

$$\text{Tr}(A) = \text{Tr}(PB \times P^{-1}) = \text{Tr}(P^{-1} \times PB) = \text{Tr}(B)$$

On peut donc écrire :

Deux matrices semblables ont la même trace

1.b D'après le cours, la multiplication à gauche ou à droite par une matrice inversible ne modifie pas le rang. Ainsi, avec les mêmes notations que dans la question **1.a**, on obtient :

$$\text{rg}(B) = \text{rg}(PB) = \text{rg}(PBP^{-1}) = \text{rg}(A)$$

Là encore, on peut conclure :

Deux matrices semblables ont le même rang.

1.c Toujours avec les notations de la question **1.a**, on peut écrire :

$$\det(A) = \det(PBP^{-1}) = \det(P) \times \det(B) \times \frac{1}{\det(P)} = \det(B)$$

On peut donc conclure :

Deux matrices semblables ont le même déterminant

1.d Pour tout $x \in \mathbb{K}$, on peut écrire :

$$\chi_A(x) = \det(xI_n - A) = \det(P(xI_n - B)P^{-1}) = \det(P) \times \det(xI_n - B) \times \frac{1}{\det(P)} = \chi_B(x)$$

Finalement :

Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

2.a Les matrices A et B proposées ici ont la même trace (à savoir 5), le même rang (à savoir 3), le même déterminant (à savoir 4) et le même polynôme caractéristique (à savoir $(X-1)(X-2)^2$), donc, on ne peut pour l'instant pas savoir si A et B sont semblables.

2.b On trouve tout d'abord facilement :

$$\text{Sp}(A) = \text{Sp}(B) = \{1; 2\}$$

Par ailleurs, la résolution de plusieurs systèmes conduit à

$$E_1(A) = \text{Vect}((1, 0, 0))$$

$$E_2(A) = \text{Vect}((1, 1, 0), (1, 0, 1))$$

$$E_1(B) = \text{Vect}((1, 0, 0))$$

$$E_2(B) = \text{Vect}((0, 1, 0))$$

2.c La matrice B n'est pas diagonalisable car la somme des dimensions de ses sous-espaces propres vaut seulement 2. En revanche, la matrice A est diagonalisable car la somme des dimensions de ses sous-espaces propres vaut 3. On peut diagonaliser A sous la forme $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.a

La famille $\mathcal{B}' = (e_2, e_1, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (elle contient en effet 3 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3 et elle est libre car $\mathcal{B}$ est libre). On trouve par ailleurs facilement : $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = M_2$. On en déduit que M_1 et M_2 sont les matrices d'un même endomorphisme dans deux bases différentes, ce qui signifie :

M_1 et M_2 sont semblables.

3.b.i

La fonction polynomiale $\widetilde{P}_3 : x \mapsto P_3(x)$ admet pour dérivée $x \mapsto 3(x^2 - 1)$. On en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$\widetilde{P}_3$	$-\infty$	1	-3	$+\infty$

Ainsi, par continuité et stricte monotonie de $\widetilde{P}_3$ sur chacun des intervalles étudiés, on déduit que cette fonction réalise une bijection de $] - \infty, -1]$ sur $] - \infty, 1]$, de $[-1, 1]$ sur $[-3, 1]$ et de $[1, +\infty[$ sur $[-3, +\infty[$. Elle s'annule donc une unique fois sur chacun des trois intervalles $] - \infty, -1]$, $[-1, 1]$ et $[1, +\infty[$, ce qui permet de conclure :

P_3 admet trois racines réelles distinctes α , β et γ .

3.b.ii

On trouve facilement que $\chi_{M_1} = \chi_{M_2} = P$, donc, d'après la question précédente, on peut dire que χ_{M_1} et χ_{M_2} sont scindés et à racines simples. On en déduit :

Les matrices M_1 et M_2 sont diagonalisables.

3.b.iii

D'après la question précédente, les matrices M_1 et M_2 sont toutes les deux semblables à la matrice diagonale $D = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$. Il existe donc deux matrices inversibles P_1 et P_2 telles que $M_1 = P_1 D P_1^{-1}$ et $M_2 = P_2 D P_2^{-1}$. On en déduit :

$$M_2 = P_2 P_1^{-1} M_1 P_1 P_2^{-1} = (P_2 P_1^{-1}) M_1 (P_2 P_1^{-1})^{-1}$$

et on retrouve donc que M_1 et M_2 sont semblables.

4

Soient $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A , c'est-à-dire, tel que $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. On remarque que $\text{rg}(u) = \text{rg}(A) = 1$, donc, d'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(u)) = n - 1$. Considérons une base $(e'_1, e'_2, \dots, e'_{n-1})$ de $\text{Ker}(u)$ et complétons cette famille en une base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_{n-1}, e'_n)$ de $\mathbb{R}^n$. La matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$ est bien de la forme U proposée. Ainsi, A et U sont les matrices d'un même endomorphisme u dans deux bases différentes, ce qui permet de conclure :

La matrice A est semblable à une matrice de la forme U indiquée.

5.a

La matrice $M = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix}$ est symétrique et coefficients complexes. Son polynôme caractéristique est $\chi_M = X^2$, donc, M admet 0 pour seule valeur propre. Or, elle ne peut pas être diagonalisable car sinon, elle serait semblable à la matrice nulle, et serait donc nulle. On en déduit :

Une matrice symétrique à coefficients complexes n'est pas nécessairement diagonalisable.

5.b.i

On constate que la matrice A possède deux colonnes égales, donc, son rang est strictement inférieur à 4. La matrice A n'est donc pas inversible et on peut déjà affirmer :

0 est valeur propre de A .

On a l'égalité $\dim(E_0(A)) + \text{rg}(A) = 4$, donc, pour déterminer la dimension de $E_0(A)$, nous allons calculer le rang de A . Les opérations $\begin{cases} L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{cases}$ puis $\begin{cases} C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 - C_2 \end{cases}$ permet successivement d'obtenir :

$$\text{rg}(A) = \text{rg} \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{rg} \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{rg} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

Or, ce dernier rang vaut 2 car la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ considérée a un déterminant égal à $\alpha^2 - \beta^2$, non nul puisque $\alpha \neq \beta$ et $\alpha \neq -\beta$. On obtient donc $\text{rg}(A) = 2$, donc :

$$\boxed{\dim(E_0(A)) = 2}$$

5.b.ii

On peut essayer de résoudre deux systèmes, mais il est plus rapide de remarquer que :

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2(\alpha + \beta) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 2(\alpha - \beta) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ainsi, les deux nombres complexes $2(\alpha + \beta)$ et $2(\alpha - \beta)$ sont des valeurs propres de A , et elles sont distinctes car $\beta \neq 0$. On peut donc écrire :

$$\boxed{2(\alpha + \beta) \text{ et } 2(\alpha - \beta) \text{ sont des valeurs propres distinctes de } A}$$

5.b.iii

D'après les deux questions précédentes, la matrice A possède au moins trois valeurs propres :

- ▷ 0 dont le sous-espace propre associé a pour dimension 2.
- ▷ $2(\alpha + \beta)$ dont le sous-espace propre associé a pour dimension au moins 1.
- ▷ $2(\alpha - \beta)$ dont le sous-espace propre associé a pour dimension au moins 1.

Or, la somme des dimensions des sous-espaces propres de A est inférieur ou égale à 4, donc :

$$\dim(E_0(A)) = 2 \qquad \dim(E_{2(\alpha+\beta)}(A)) = 1 \qquad \dim(E_{2(\alpha-\beta)}(A)) = 1$$

La somme des dimensions des sous-espaces propres de A vaut donc 4, donc, A est diagonalisable et semblable à

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(\alpha + \beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(\alpha - \beta) \end{bmatrix}$$

6.a

La matrice A possède λ pour unique valeur propre. Si elle était diagonalisable, elle serait donc semblable à la matrice diagonale λI_2 , on pourrait donc écrire $A = P(\lambda I_2)P^{-1} = \lambda I_2$, ce qui n'est pas le cas vu que $a \neq 0$. Le raisonnement est le même pour la matrice B . En conclusion :

$$\boxed{\text{Les matrices } A \text{ et } B \text{ ne sont pas diagonalisables.}}$$

6.b

Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à A , c'est-à-dire, tel que $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. Posons $e'_1 = \frac{a}{b}e_1$ et $e'_2 = e_2$. Il est facile de montrer que la famille $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et on trouve :

$$u(e'_1) = \frac{a}{b}u(e_1) = \frac{a}{b}\lambda e_1 = \lambda e'_1 \qquad u(e'_2) = u(e_2) = ae_1 + \lambda e_2 = be'_1 + \lambda e'_2$$

On obtient donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = B$. Ainsi, A et B sont les matrices d'un même endomorphisme dans deux bases différentes, donc :

$$\boxed{\text{Les matrices } A \text{ et } B \text{ sont semblables.}}$$

EXERCICE 1

Dans tout ce corrigé, on utilisera les deux événements, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

P_k : « On obtient PILE au k -ième lancer »

F_k : « On obtient FACE au k -ième lancer »

1 Il est facile de voir que $A_2 = P_1 \cap F_2$, donc, par indépendance des lancers :

$$a_2 = pq$$

De même, on constate que $U_1 = F_1 \cap F_2$, donc, toujours par indépendance des lancers :

$$u_1 = q^2$$

On a les égalités $B_2 = (P_1 \cap P_2) \cup (F_1 \cap P_2) = P_2$, donc :

$$b_2 = p$$

L'événement A_3 sera réalisé si et seulement si les trois premiers lancers ne donnent pas deux FACE consécutifs et si le troisième lancer donne FACE. Le deuxième lancer doit donc nécessairement donner PILE. On a donc $A_3 = P_2 \cap F_3$, donc, par indépendance des lancers :

$$a_3 = pq$$

Enfin, on trouve facilement : $B_3 = (P_1 \cap F_2 \cap P_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap P_3) \cup (P_1 \cap P_2 \cap P_3)$. Par incompatibilité des événements constitutifs de cette union, puis par indépendance des lancers, on obtient donc : $b_3 = 2p^2q + p^3$, c'est-à-dire :

$$b_3 = p^2(1 + q)$$

2 L'événement U_n sera réalisé si et seulement si on obtient deux FACE consécutifs pour la première fois aux lancers n et $n + 1$, c'est-à-dire, si A_n est réalisé et que F_{n+1} est réalisé. On a donc $U_n = A_n \cap F_{n+1}$, ce qui donne, en passant aux probabilités :

$$\forall n \geq 2, u_n = qa_n$$

3 • Si A_n est réalisé, il n'y a pas deux FACE consécutifs lors des n premiers lancers et il y a un FACE au n -ième lancer. L'événement A_{n+1} ne peut donc pas être réalisé car sinon, il y aurait deux FACE consécutifs lors des $n + 1$ premiers lancers. On en déduit :

$$P(A_{n+1}/A_n) = 0$$

• Si A_n est réalisé, il n'y a pas deux FACE consécutifs lors des n premiers lancers et il y a un FACE au n -ième lancer. L'événement B_{n+1} sera alors réalisé uniquement s'il y a un PILE au lancer $n + 1$. La probabilité conditionnelle cherchée est donc celle de P_{n+1} , c'est-à-dire :

$$P(B_{n+1}/A_n) = p$$

De la même manière, on trouve :

$$P(A_{n+1}/B_n) = P(F_{n+1}) = q$$

$$P(B_{n+1}/B_n) = P(P_{n+1}) = p$$

4 Soit $n \geq 2$. Il serait tentant d'appliquer la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements (A_n, B_n) , sauf que cette dernière famille n'est pas un système complet d'événements ! On peut toutefois écrire les deux égalités :

$$A_{n+1} = (A_{n+1} \cap A_n) \cup (A_{n+1} \cap B_n)$$

$$B_{n+1} = (B_{n+1} \cap A_n) \cup (B_{n+1} \cap B_n)$$

puis par incompatibilité, on trouve :

$$a_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_{n+1}/A_n) \times P(A_n) + P(A_{n+1}/B_n) \times P(B_n)$$

et

$$b_{n+1} = P(B_{n+1}) = P(B_{n+1}/A_n) \times P(A_n) + P(B_{n+1}/B_n) \times P(B_n)$$

En utilisant les probabilités conditionnelles calculées dans la question précédente, on obtient donc :

$$\forall n \geq 2, \begin{cases} a_{n+1} = qb_n \\ b_{n+1} = p(a_n + b_n) \end{cases}$$

5.a

Soit $n \geq 2$. On obtient :

$$v_{n+2} = 2^{n+2}a_{n+2} = 2^{n+2} \times \frac{1}{2}b_{n+1} = 2^{n+1} \times \frac{1}{2}(a_n + b_n) = 2^n a_n + 2^n b_n = v_n + 2^{n+1} \times \frac{1}{2}b_n$$

Finalement :

$$\forall n \geq 2, v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$$

5.b

La suite $(v_n)_{n \geq 2}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique associée admet pour racines $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Il existe donc deux réels α et β tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, v_n = \alpha \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n + \beta \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Les conditions à l'origine $v_2 = 4a_2 = 1$ et $v_3 = 8a_3 = 2$ permettent d'obtenir $\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ et $\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, v_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

On en déduit, grâce à la question **2**, que pour $n \geq 2$:

$$a_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} \right)^n \right] \quad u_n = \frac{\sqrt{5}}{10} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} \right)^n \right]$$

5.c

Rappelons-nous que $u_1 = \frac{1}{4}$. On trouve donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^{n-2} - \frac{\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} \right)^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} \right)^{n-2}$$

On aura bien entendu reconnu des séries géométriques convergentes car les deux réels $\frac{x_1}{2}$ et $\frac{x_2}{2}$ appartiennent à $] -1, 1[$, et grâce à l'égalité $\sum_{k=0}^{+\infty} \rho^k = \frac{1}{1-\rho}$ valable pour tout $\rho \in] -1, 1[$, on peut calculer la précédente somme. Après quelques lignes d'un calcul pénible, on trouve effectivement :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$$

Puisque les événements U_n sont incompatibles, l'égalité précédente peut encore s'écrire :

$$P \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} U_n \right) = 1$$

On peut donc conclure :

$$\text{On est presque certain d'obtenir deux FACE consécutifs lors de la succession de lancers.}$$

EXERCICE 2

1. • La fonction $f_1 : x \mapsto \frac{\ln(x)}{(x+1)^2}$ est continue (donc, continue par morceaux) sur $[1, +\infty[$. L'intégrale I_1 est donc impropre uniquement en $+\infty$. On montre facilement que $f_1(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$. Or, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} dx$ est une intégrale de Riemann convergente car $\frac{3}{2} > 1$. Par comparaison d'intégrales de fonctions positives, on peut donc conclure que :

I_1 est convergente.

- La fonction $f_2 : x \mapsto \ln(x)e^{-x}$ est continue (donc, continue par morceaux) sur $]0, +\infty[$. L'intégrale I_2 est donc impropre en 0 et en $+\infty$. On a tout d'abord $f_2(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln(x)$. Or, l'intégrale $\int_0^1 \ln(x) dx$ est une intégrale de référence convergente, donc, par comparaison d'intégrales de fonctions négatives, on peut déjà dire que l'intégrale $\int_0^1 \ln(x)e^{-x} dx$ est convergente. Par ailleurs, $f_2(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Or, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ est une intégrale de Riemann convergente car $2 > 1$. Par comparaison d'intégrales de fonctions positives, on peut donc dire que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \ln(x)e^{-x} dx$ converge. En conclusion :

I_2 est convergente.

- La fonction $f_3 : x \mapsto \frac{\operatorname{sh}(x)}{x^2}$ est continue (donc, continue par morceaux) sur $]0, 1]$. L'intégrale I_3 est donc impropre uniquement en 0. On remarque que $f_3(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}$. Or, l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ est une intégrale de Riemann divergente, donc, par comparaison d'intégrales de fonctions positives, on peut donc conclure que :

I_3 est divergente.

- La fonction $f_4 : x \mapsto \frac{e^{ix}}{\sqrt{x}}$ est continue (donc, continue par morceaux) sur $]0, 1]$. L'intégrale I_4 est donc impropre uniquement en 0. On remarque que $|f_4(x)| = \frac{1}{\sqrt{x}}$ pour tout $x \in]0, 1]$. Or, l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ est une intégrale de Riemann convergente car $\frac{1}{2} < 1$, donc, par comparaison d'intégrales de fonctions positives, on peut donc conclure que l'intégrale I_4 converge absolument, donc, que :

I_4 est convergente.

2. La fonction $f : x \mapsto \frac{x - \sin(x)}{x^\alpha}$ est continue (donc, continue par morceaux) sur $]0, +\infty[$ (et même sur $[0, +\infty[$ si $\alpha \leq 0$). L'intégrale $I(\alpha)$ est donc impropre en $+\infty$ et aussi en 0 si $\alpha > 0$. On a tout d'abord $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^3}{x^\alpha} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{x^{\alpha-3}}$. Or, l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-3}} dx$ est une intégrale de Riemann qui converge si et seulement si $\alpha - 3 < 1$, c'est-à-dire, si et seulement si $\alpha < 4$, donc, par comparaison d'intégrales de fonctions positives, on peut déjà dire que l'intégrale $\int_0^1 \frac{x - \sin(x)}{x^\alpha} dx$ converge si et seulement si $\alpha < 4$. Par ailleurs, $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha-1}}$. Or, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}} dx$ est une intégrale de Riemann qui converge si et seulement si $\alpha - 1 > 1$, c'est-à-dire, si et seulement si $\alpha > 2$. Par comparaison d'intégrales de fonctions positives, on peut donc dire que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{x - \sin(x)}{x^\alpha} dx$ converge si et seulement si $\alpha > 2$. En conclusion :

$I(\alpha)$ convergente $\iff \alpha \in]2, 4[$

FIN !