

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Ce sujet est constitué d'un problème et de deux exercices qui sont indépendants.

PROBLEME

On s'intéresse dans ce problème, à travers divers exemples, à quelques méthodes pour prouver que deux matrices sont semblables. Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Soient A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
 - (a) Justifier que A et B ont la même trace.
 - (b) Justifier que A et B ont le même rang.
 - (c) Justifier que A et B ont le même déterminant.
 - (d) Justifier que A et B ont le même polynôme caractéristique.
2. **Un premier exemple :** On considère les deux matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- (a) La question 1 permet-elle de savoir si A et B sont semblables ?
 - (b) Déterminer les éléments propres (valeurs propres et sous-espaces propres) de A et B .
 - (c) Diagonaliser la ou les matrices, parmi A et B , qui le sont (on proposera une écriture sous la forme PDP^{-1} où D est une matrice diagonale ayant ses coefficients diagonaux rangés dans l'ordre croissant, où la première ligne de la matrice P ne contient que des chiffres 1. On donnera par ailleurs l'expression de P^{-1}).
3. **Un Deuxième exemple :** On considère les deux matrices M_1 et M_2 de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

- (a) Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à M_1 dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$. Chercher une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $M_2 = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$. Que peut-on en déduire concernant M_1 et M_2 ?
 - (b)
 - i. Démontrer que le polynôme $P = X^3 - 3X - 1$ admet trois racines réelles distinctes (que l'on ne cherchera pas à déterminer) notées α , β et γ .
 - ii. Démontrer que M_1 et M_2 sont diagonalisables.
 - iii. Retrouver le résultat de la question 3.a.
4. **Un troisième exemple :** Démontrer que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 est semblable à une matrice :

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

On pourra utiliser l'endomorphisme u canoniquement associé à la matrice A .

5. Un quatrième exemple :

- (a) Démontrer, à l'aide d'un exemple, qu'une matrice symétrique à coefficients complexes n'est pas nécessairement diagonalisable.

(b) On se donne une matrice $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \alpha \\ \alpha & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \alpha \end{bmatrix}$ où α et β sont deux nombres complexes non nuls, différents

et non opposés.

- Démontrer que 0 est valeur propre de A et déterminer la dimension de $E_0(A)$.
- Justifier que $2(\alpha + \beta)$ et $2(\alpha - \beta)$ sont des valeurs propres distinctes de A .
- Démontrer que A est semblable à une matrice diagonale que l'on précisera (il sera en revanche inutile de préciser la matrice de passage associée).

6. Un cinquième exemple : Soient a et b des réels non nuls et $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère les deux matrices

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

- Les matrices A et B sont-elles diagonalisables ?
- Démontrer que A et B sont semblables.

EXERCICE 1 : probabilités

Soient $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$. On effectue une suite de lancers d'une pièce de monnaie. On suppose que les lancers sont indépendants et qu'à chaque lancer, la pièce donne PILE avec la probabilité p et FACE avec la probabilité q .

On s'intéresse au nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux FACE consécutifs. Pour tout entier $n \geq 1$, on considère l'événement U_n « On obtient deux FACE consécutifs, pour la première fois, aux lancers n et $n + 1$ » et on pose $u_n = P(U_n)$. Pour tout entier $n \geq 2$, on considère par ailleurs les événements :

A_n : « Les n premiers lancers ne donnent pas deux FACE consécutifs et le n -ème lancer donne FACE »

B_n : « Les n premiers lancers ne donnent pas deux FACE consécutifs et le n -ème lancer donne PILE »

On pose enfin, pour $n \geq 2$, $a_n = P(A_n)$ et $b_n = P(B_n)$.

- Calculer a_2 , u_1 , b_2 , a_3 et b_3 .
- Donner, pour tout $n \geq 2$, une relation simple entre a_n et u_n .
- Pour tout $n \geq 2$, déterminer les probabilités

$$P(A_{n+1}/A_n) \quad P(B_{n+1}/A_n) \quad P(A_{n+1}/B_n) \quad P(B_{n+1}/B_n)$$

4. En déduire, pour tout $n \geq 2$, les relations suivantes :
$$\begin{cases} a_{n+1} = qb_n \\ b_{n+1} = p(a_n + b_n) \end{cases}.$$

5. On suppose dans cette question que $p = \frac{1}{2}$.

- On pose, pour $n \geq 2$, $v_n = 2^n a_n$. Déterminer une relation de récurrence entre v_{n+2} , v_{n+1} et v_n .
- En déduire, pour tout $n \geq 2$, une expression de a_n puis de u_n en fonction de n .
- Vérifier que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$. Donner une interprétation de ce résultat.

EXERCICE 2 : intégrales généralisées

1. Déterminer la nature des quatre intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{(x+1)^2} dx \quad I_2 = \int_0^{+\infty} \ln(x) e^{-x} dx \quad I_3 = \int_0^1 \frac{\operatorname{sh}(x)}{x^2} dx \quad I_4 = \int_0^1 \frac{e^{ix}}{\sqrt{x}} dx$$

2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que l'intégrale suivante converge :

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x - \sin(x)}{x^\alpha} dx$$