

1 Tout d'abord, l'application τ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$ car $P(X+1)$ est de même degré que P (ce sera démontré plus précisément dans la question suivante). D'autre part, si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$, alors :

$$\tau(\alpha P + \beta Q) = (\alpha P + \beta Q)(X+1) = \alpha P(X+1) + \beta Q(X+1) = \alpha \tau(P) + \beta \tau(Q)$$

Finalement :

$$\boxed{\tau \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X]}$$

2 Considérons un polynôme P de degré d de la forme $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ (avec donc $a_d \neq 0$). On obtient :

$$P(X+1) = a_d(X+1)^d + \sum_{k=0}^{d-1} a_k(X+1)^k = a_d X^d + R(X) \quad \text{avec} \quad \deg(R) \leq d-1$$

On peut donc conclure, pour tout $P \neq 0$:

$$\boxed{\deg(\tau(P)) = \deg(P)} \quad \boxed{\text{cd}(\tau(P)) = \text{cd}(P)}$$

3 Nous allons démontrer par récurrence que $\tau^k(P) = P(X+k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. C'est évidemment vrai si $k=0$. Supposons le résultat vrai au rang $k \in \mathbb{N}$. On obtient alors :

$$\tau^{k+1}(P) = \tau(\tau^k(P)) = \tau(P(X+k)) = P(X+k+1)$$

ce qui démontre le résultat au rang $k+1$. Le principe de récurrence permet donc de conclure :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \forall P \in \mathbb{R}_n[X], \tau^k(P) = P(X+k)}$$

4.a On trouve :

$$\tau(1) = 1 \quad \tau(X) = 1 + X \quad \tau(X^2) = 1 + 2X + X^2 \quad \tau(X^3) = 1 + 3X + 3X^2 + X^3$$

On en déduit donc :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.b Dans le cas général, la formule du binôme de Newton permet d'écrire, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$\tau(X^k) = (X+1)^k = \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} X^p$$

On déduit donc (attention au décalage d'indice car la première colonne correspond à $\tau(X^0)$) :

$$\boxed{\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, M_{ij} = \begin{cases} \binom{j-1}{i-1} & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}}$$

5.a

La matrice de τ dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ a été calculée dans la question 4.a. Elle est triangulaire supérieure et ses éléments diagonaux sont tous non nuls. On en déduit que :

τ est bijective.

La matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\tau^{-1})$ cherchée n'est autre que la matrice inverse de la matrice calculée dans la question 4.a. On trouve donc, après calculs :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\tau^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5.b

Considérons l'application $\varphi : \begin{matrix} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(X-1) \end{matrix}$. φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et il est facile de vérifier que $\varphi \circ \tau = \tau \circ \varphi = \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$. On en déduit que :

τ est bijective

$$\tau^{-1} : \begin{matrix} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(X-1) \end{matrix}$$

5.c

Par le même raisonnement que dans la question 3, on démontre que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall P \in \mathbb{R}_n[X], \tau^{-k}(P) = P(X-k)$$

On peut donc conclure :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \forall P \in \mathbb{R}_n[X], \tau^k(P) = P(X+k)$$

5.d

On trouve :

$$\tau^{-1}(1) = 1 \quad \tau^{-1}(X) = -1 + X \quad \tau^{-1}(X^2) = 1 - 2X + X^2 \quad \tau^{-1}(X^3) = -1 + 3X - 3X^2 + X^3$$

Plus généralement, la formule du binôme de Newton permet d'écrire, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$\tau^{-1}(X^k) = (X-1)^k = \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} (-1)^{k-p} X^p$$

On déduit donc (attention encore au décalage d'indice) :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, (M^{-1})_{ij} = \begin{cases} (-1)^{j-i} \binom{j-1}{i-1} & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}$$

6.a

Par définition de l'égalité entre les suites (u_k) et (v_k) , on a :

$$\begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \binom{0}{0} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & & \vdots \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \cdots & \cdots & \binom{n}{n} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

On choisit donc :

$$Q = M^T$$

6.b Considérons l'égalité $V = M^\top U$ qui permet de définir la suite (v_n) . En multipliant chaque membre par $(M^\top)^{-1}$ à gauche, on obtient : $U = (M^\top)^{-1} V$, ce qui s'écrit encore : $U = (M^{-1})^\top V$. On en déduit, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$u_k = \sum_{p=1}^{n+1} (M^{-1})_{k+1,p}^\top v_{p-1} = \sum_{p=1}^{n+1} (M^{-1})_{p,k+1} v_{p-1} \stackrel{\text{5.d}}{=} \sum_{p=1}^{k+1} (-1)^{k+1-p} \binom{k}{p-1} v_{p-1}$$

Le changement d'indice $j = p - 1$ permet finalement d'obtenir :

$$\forall k \in \mathbb{N}, u_k = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j$$

6.c Par définition de la suite (v_n) , on trouve : $\forall k \in \mathbb{N}, v_k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \lambda^j$. La formule du binôme de Newton permet alors d'obtenir :

$$\forall k \in \mathbb{N}, v_k = (\lambda + 1)^k$$

Il s'agit alors de vérifier que : $\forall k \in \mathbb{N}, \lambda^k = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} (\lambda + 1)^j$, ce qui est là encore une conséquence de la formule du binôme de Newton.

7 Soit P un polynôme non constant de $\mathbb{R}_n[X]$. Écrivons $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ avec $a_d \neq 0$. On obtient :

$$\delta(P) = \sum_{k=0}^d a_k (X+1)^k - \sum_{k=0}^d a_k X^k = a_d (X+1)^d - a_d X^d + R_1 = da_d X^{d-1} + R_2 \quad \text{où} \quad \begin{cases} \deg(R_1) \leq d-1 \\ \deg(R_2) \leq d-2 \end{cases}$$

On en déduit, pour tout polynôme P non constant :

$$\deg(\delta(P)) = \deg(P) - 1$$

$$\text{cd}(\delta(P)) = \deg(P) \times \text{cd}(P)$$

8 Rappelons pour commencer que, par définition, le degré du polynôme nul vaut $-\infty$. D'après la question précédente, on peut dire que si $\deg(P) \geq 1$, alors, $\deg(\delta(P)) \geq 0$, donc, P n'appartient pas au noyau de δ . En revanche, si P est un polynôme constant, il est facile de vérifier que $\delta(P) = 0$. Ainsi :

$$\text{Ker}(\delta) = \mathbb{R}_0[X]$$

Déterminons maintenant l'image de δ . D'après le théorème du rang, on peut déjà dire que $\text{rg}(\delta) = n+1 - \dim(\mathbb{R}_0[X]) = n$. Or, toujours d'après la question 8, on a $\text{Im}(\delta) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Ces deux espaces étant de même dimension, on peut conclure :

$$\text{Im}(\delta) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$$

9 Effectuons un raisonnement par récurrence. Le résultat annoncé est vrai pour $j = 1$ d'après la question précédente. Supposons qu'il l'est pour un entier $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. On trouve alors :

$$P \in \text{Ker}(\delta^{j+1}) \iff \delta^{j+1}(P) = 0 \iff \delta^j(\delta(P)) = 0 \stackrel{H-R}{\iff} \delta(P) \in \mathbb{R}_{j-1}[X] \iff P \in \mathbb{R}_j[X]$$

la dernière équivalence venant du fait que $\deg(\delta(P)) = \deg(P) - 1$. On obtient donc $\text{Ker}(\delta^{j+1}) = \mathbb{R}_j[X]$, donc, le résultat est vrai au rang $j+1$, et le principe de récurrence permet de conclure :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{Ker}(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X]$$

Intéressons-nous maintenant à $\text{Im}(\delta^j)$. Il est facile de déduire de la question 7 que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors, $\deg(\delta^j(P)) = \deg(P) - j$. Il en résulte que $\text{Im}(\delta^j) \subset \mathbb{R}_{n-j}[X]$. Or, ces deux espaces sont de même dimension d'après le théorème du rang car $\dim(\text{Im}(\delta^j)) = n+1-j = \dim(\mathbb{R}_{n-j}[X])$. On peut donc conclure :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X]$$

10 Par définition de δ , on peut écrire que $\delta = \tau - \text{Id}$. Puisque les endomorphismes τ et $-\text{Id}$ commutent, on peut utiliser la formule du binôme de Newton pour écrire, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\delta^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \tau^j (-\text{Id})^{k-j}$$

Finalement :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall P \in \mathbb{R}_n[X], \delta^k(P) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \tau^j(P)$$

11 Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. D'après la question **9**, on peut dire que $P \in \text{Ker}(\delta^n)$, donc, en utilisant la question précédente :

$$0 = \delta^n(P) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^{n-j} \tau^j(P)$$

En utilisant maintenant la question **3**, il en résulte :

$$0 = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^{n-j} P(X+j)$$

Reste à appliquer ce résultat en 0 pour obtenir :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^{n-j} P(j) = 0$$

12.a On trouve $u \circ \delta^2 = u \circ (u^2)^2 = u^5 = (u^2)^2 \circ u = \delta^2 \circ u$. Ainsi :

$$u \text{ et } \delta^2 \text{ commutent.}$$

12.b Considérons un polynôme P dans $\mathbb{R}_1[X]$. D'après la question **9**, on a donc $P \in \text{Ker}(\delta^2)$, d'où :

$$\delta^2(u(P)) = (\delta^2 \circ u)(P) = (u \circ \delta^2)(P) = u(\delta^2(P)) = u(0) = 0$$

Le polynôme $u(P)$ appartient donc à $\text{Ker}(\delta^2) = \mathbb{R}_1[X]$. Finalement :

$$\mathbb{R}_1[X] \text{ est stable par } u.$$

12.c Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe une matrice $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

On a donc $\begin{bmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ d'où le système $\begin{cases} a^2 + bc = 0 \\ b(a+d) = 1 \\ c(a+d) = 0 \\ bc + d^2 = 0 \end{cases}$. D'après les lignes 2 et 3, on peut dire que

$a+d \neq 0$, d'où nécessairement $c = 0$. Les lignes 1 et 4 fournissent alors $a^2 = 0$ et $d^2 = 0$, ce qui contredit la ligne 2. En conclusion :

$$\text{Il n'existe pas de matrice } A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ telle que } A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

12.d D'après la question **12.b**, l'espace $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par u . Il est donc légitime de s'intéresser à l'application induite par u sur $\mathbb{R}_1[X]$, c'est-à-dire, l'application :

$$\tilde{u} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_1[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_1[X] \\ P & \longmapsto & u(P) \end{array}$$

Notons A la matrice de $\tilde{u}$ relativement à la base canonique $\mathcal{B}_0 = (1, X)$ de $\mathbb{R}_1[X]$. Puisque $u \circ u = \delta$, on peut affirmer que :

$$A^2 = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u^2) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\delta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ce qui contredit le résultat de la question **12.c**. En conclusion :

Il n'existe pas d'endomorphisme u de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $u \circ u = \delta$

13.a Les valeurs propres de τ sont celles de la matrice M de τ dans la base canonique. Or, d'après la question **4.b**, cette matrice M est triangulaire supérieure et tous ses coefficients diagonaux sont égaux à 1. On déduit donc :

$$\text{Sp}(\tau) = \{1\}.$$

Un réel λ est une valeur propre de δ si et seulement s'il existe $P \in \mathbb{R}_n[X] \setminus \{0\}$ tel que $\delta(P) = \lambda P$. Or, l'égalité $\delta(P) = \lambda P$ est équivalente à $\tau(P) - P = \lambda P$, soit encore, à $\tau(P) = (\lambda + 1)P$. On peut donc dire que $\lambda \in \text{Sp}(\delta)$ si et seulement si $\lambda + 1 \in \text{Sp}(\tau) = \{1\}$. En conclusion :

$$\text{Sp}(\delta) = \{0\}.$$

13.b On trouve tout d'abord :

$$E_1(\tau) = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / \tau(P) = P\} = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / \delta(P) = 0\} = \text{Ker}(\delta) = \mathbb{R}_0[X]$$

Par ailleurs :

$$E_0(\delta) = \text{Ker}(\delta) = \mathbb{R}_0[X]$$

En conclusion :

$$E_1(\tau) = E_0(\delta) = \mathbb{R}_0[X]$$

14 Remarquons que la famille $(H_0, H_1, \dots, H_n)$ est échelonnée en degrés car pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\deg(H_k) = k$. Elle est donc libre, et comme elle possède $n+1$ éléments dans l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$, on peut conclure :

La famille $(H_0, H_1, \dots, H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

15.a Comme le suggère l'énoncé, envisageons trois cas :

- Si $j < 0$. Posons $p = -j$. On trouve donc :

$$\begin{aligned} H_k(j) &= \frac{(-p)(-p-1)(-p-2)\cdots(-p-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{p(p+1)(p+2)\cdots(p+k-1)}{k!} \\ &= (-1)^k \frac{(p+k-1)!}{(p-1)!k!} = (-1)^k \binom{p+k-1}{p-1} \end{aligned}$$

- Si $j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, alors, j est une racine de H_k , donc, $H_k(j) = 0$.
- Si $j \geq k$, on peut écrire :

$$H_k(j) = \frac{j(j-1)(j-2)\cdots(j-k+1)}{k!} = \frac{j!}{(j-k)!k!} = \binom{j}{k}$$

On peut donc conclure :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \forall j \in \mathbb{Z}, H_k(j) = \begin{cases} (-1)^k \binom{-j+k-1}{-j-1} & \text{si } j < 0 \\ 0 & \text{si } j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket \\ \binom{j}{k} & \text{si } j \geq k \end{cases}$$

15.b D'après le cours de première année, un coefficient binomial $\binom{n}{p}$ est un entier naturel. On en déduit :

$$H_k(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$$

16 On trouve facilement $\delta(H_0) = 0$. Considérons maintenant $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On obtient :

$$\begin{aligned}\delta(H_k) &= \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (X+1-i) - \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (X-i) = \frac{1}{k!} \prod_{j=-1}^{k-2} (X-j) - \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (X-i) \\ &= \frac{1}{k!} \left[\prod_{i=0}^{k-2} (X-i) \right] \times ((X+1) - (X-k+1)) = \frac{1}{(k-1)!} \prod_{i=0}^{k-2} (X-i)\end{aligned}$$

On peut donc conclure :

$$\boxed{\delta(H_0) = 0} \quad \boxed{\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \delta(H_k) = H_{k-1}}$$

17 Rappelons que M est la matrice de l'endomorphisme τ dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$. D'autre part, avec la relation $\tau = \delta + \text{Id}$, on obtient :

$$\tau(H_0) = \delta(H_0) + H_0 = H_0 \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \tau(H_k) = \delta(H_k) + H_k = H_{k-1} + H_k$$

On trouve donc que la matrice de τ dans la base $(H_0, H_1, \dots, H_n)$ vaut M' . En conclusion, M et M' sont les matrices d'un même endomorphisme dans deux bases différentes, donc :

$$\boxed{\text{Les matrices } M \text{ et } M' \text{ sont semblables.}}$$

18 D'après la propriété démontrée dans la question **16**, on déduit rapidement que :

$$\delta^k(H_l) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > l \\ H_{l-k} & \text{si } k \leq l \end{cases}$$

Or, si $k < l$, 0 est racine de H_{l-k} , donc, $\delta^k(H_l)(0) = 0$. Il reste donc à calculer $\delta^k(H_k)(0) = H_0(0) = 1$. On peut donc conclure :

$$\boxed{\forall (k, l) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2, \delta^k(H_l)(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{si } k \neq l \end{cases}}$$

19 Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. D'après la question **14**, la famille $(H_0, H_1, \dots, H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, donc, il existe des réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que :

$$P = a_0 H_0 + a_1 H_1 + \dots + a_n H_n$$

Par linéarité de δ^k , on peut écrire, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$\delta^k(P)(0) = \sum_{j=0}^n a_j \delta^k(H_j)(0) \stackrel{\mathbf{18}}{=} a_k$$

On peut donc conclure :

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_n[X], P = \sum_{k=0}^n \delta^k(P)(0) H_k}$$

20.a D'après la question **19**, il suffit de calculer les images du polynôme proposé par les applications δ^k . Posons $P = X^3 + 2X^2 + 5X + 7$. On obtient :

$$\delta(P) = 3X^2 + 7X + 8 \quad \delta^2(P) = 6X + 10 \quad \delta^3(P) = 6$$

On en déduit :

$$\boxed{P = 7H_0 + 8H_1 + 10H_2 + 6H_3}$$

20.b

En utilisant la question **16**, on peut affirmer :

Le polynôme $P = 7H_2 + 8H_3 + 10H_4 + 6H_5$ appartient à $\mathbb{R}_5[X]$ et vérifie $\delta^2(P) = X^3 + 2X^2 + 5X + 7$

20.c

Dans la question précédente, nous avons démontré que le polynôme $P = 7H_2 + 8H_3 + 10H_4 + 6H_5$ vérifie $\delta^2(P) = X^3 + 2X^2 + 5X + 7$, ce qui entraîne :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \delta^2(P)(k) = k^3 + 2k^2 + 5k + 7$$

Or, $\delta^2(P) = P(X+2) - 2P(X+1) + P(X)$, donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(k+2) - 2P(k+1) + P(k) = k^3 + 2k^2 + 5k + 7$$

La suite $(p_k)_{k \in \mathbb{N}} = (P(k))_{k \in \mathbb{N}}$ est donc une solution particulière de notre problème. Si on considère maintenant une autre suite solution, on constate que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, (u-p)_{k+2} - 2(u-p)_{k+1} + (u-p)_k = (k^3 + 2k^2 + 5k + 7) - (k^3 + 2k^2 + 5k + 7) = 0$$

donc, la suite $(u_k - p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique associée à cette équation est $r^2 - 2r + 1 = 0$ dont l'unique racine est $r = 1$. Ainsi, il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall k \in \mathbb{N}, u_k - p_k = A + Bk$. La réciproque est facile à démontrer. En conclusion, les suites solutions sont de la forme :

$$\forall k \in \mathbb{N}, u_k = A + Bk + 7H_2(k) + 8H_3(k) + 10H_4(k) + 6H_5(k) \text{ avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

FIN !