

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Dans tout ce problème, n désigne un entier naturel non nul. Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $\deg(P)$ le degré de P et $\text{cd}(P)$ le coefficient dominant de P . Pour tout ensemble E et toute application $f : E \rightarrow E$, on définit par récurrence l'application f^k par $f^0 = \text{Id}_E$ et $f^{k+1} = f \circ f^k$. Enfin, si f est bijective, on note f^{-1} son application réciproque et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{-k} = (f^{-1})^k$.

PARTIE I - L'opérateur de translation

On appelle opérateur de translation l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \tau(P) = P(X+1)$. Par exemple, si $P = X^2 - 4X + 3$, alors, $\tau(P) = (X+1)^2 - 4(X+1) + 3$.

- Démontrer que τ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X] \setminus \{0\}$, exprimer $\deg(\tau(P))$ et $\text{cd}(\tau(P))$ en fonction de $\deg(P)$ et $\text{cd}(P)$.
- Soient $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $k \in \mathbb{N}$. Donner l'expression de $\tau^k(P)$ en fonction de P .
- On note $M = (M_{ij})_{1 \leq i, j \leq n+1}$ la matrice de τ dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = (1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
 - On suppose, dans cette question uniquement, que $n = 3$. Déterminer M .
 - On revient au cas général. Exprimer les coefficients M_{ij} en fonction de i et j .
- On s'intéresse dans cette question à l'éventuelle bijectivité de τ .
 - On suppose, dans cette question uniquement, que $n = 3$. Démontrer que τ est bijective et préciser $\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\tau^{-1})$.
 - On revient au cas général. L'application τ est-elle bijective ? Si oui, préciser τ^{-1} .
 - L'expression de τ^k trouvée dans la question 3 est-elle toujours valable pour $k \in \mathbb{Z}$?
 - Exprimer les coefficients $(M^{-1})_{i,j}$ en fonction de i et j .
- On se donne une suite réelle $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et on définit pour tout entier $k \in \mathbb{N}$:

$$v_k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} u_j$$

- Déterminer une matrice $Q \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $\begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$.
- En déduire la formule d'inversion : $\forall k \in \mathbb{N}, u_k = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j$.
- On considère un réel λ et la suite $(u_k) = (\lambda^k)$. Quelle est la suite (v_k) correspondante ? Vérifier alors la formule de la question 6.b.

PARTIE II - L'opérateur de différence

On appelle opérateur de différence l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

- Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ non constant, exprimer $\deg(\delta(P))$ et $\text{cd}(\delta(P))$ en fonction de $\deg(P)$ et $\text{cd}(P)$.
- En déduire $\text{Ker}(\delta)$ et $\text{Im}(\delta)$.
- Plus généralement, Prouver que $\text{Ker}(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X]$ et $\text{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X]$ pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
- Pour $k \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\delta^k(P)$ en fonction des $\tau^j(P)$ pour tout $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$.
- Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Montrer que $\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(j) = 0$.

- 12.** Dans cette question, on se propose de démontrer par l'absurde qu'il n'existe pas d'application linéaire $u : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ telle que $u \circ u = \delta$. On suppose, par l'absurde, qu'une telle application u existe.
- Montrer que u et δ^2 commutent.
 - En déduire que $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par u .
 - Montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
 - Conclure.
- 13. Éléments propres de τ et δ :**
- Déterminer le spectre de τ . En déduire celui de δ .
 - Déterminer les sous-espaces propres de τ et de δ .

PARTIE III - Etude d'une famille de polynômes

On considère dans cette partie la famille de polynômes :

$$H_0 = 1 \qquad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, H_k = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (X - i)$$

- 14.** Démontrer que la famille $(H_0, H_1, \dots, H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
- 15. Une propriété des H_k :**
- Soient $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $j \in \mathbb{Z}$. Calculer $H_k(j)$. On discutera suivant que $j < 0$, $j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ ou $j \geq k$.
 - En déduire que $H_k(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$, c'est-à-dire, que H_k est à valeurs entières sur les entiers.
- 16.** Calculer $\delta(H_0)$, et pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, exprimer $\delta(H_k)$ en fonction de H_{k-1} .
- 17.** La matrice M (définie à la question 4) et la matrice M' de taille $n+1$ ci-dessous sont-elles semblables ?

$$M' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 18.** Démontrer que : $\forall (k, l) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2, \delta^k(H_l)(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{si } k \neq l \end{cases}$.
- 19.** Démontrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X] : P = \sum_{k=0}^n (\delta^k(P))(0)H_k$.
- 20. Etude d'un exemple :**
- Déterminer les coordonnées du polynôme $X^3 + 2X^2 + 5X + 7$ dans la base (H_0, H_1, H_2, H_3) de $\mathbb{R}_3[X]$.
 - En déduire un polynôme $P \in \mathbb{R}_5[X]$ tel que : $\delta^2(P) = X^3 + 2X^2 + 5X + 7$.
 - Déterminer les suites réelles $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k = k^3 + 2k^2 + 5k + 7$$