

PC2 - DS N° 1 - Un corrigé

1 On trouve successivement :

$$\boxed{\alpha_0 = 1} \quad \boxed{\alpha_1 = 0} \quad \boxed{\alpha_2 = 1} \quad \boxed{\alpha_3 = 2} \quad \boxed{\alpha_4 = 9}$$

2 Démontrons le résultat annoncé par récurrence sur n . Pour tout $n \geq 2$, introduisons l'assertion $\mathcal{P}(n)$: « $\alpha_n \in \mathbb{N}^*$ ». On a $\alpha_2 = 1$, donc, $\mathcal{P}(2)$ est vraie. Supposons le résultat vrai pour un entier $n \geq 2$. Il est tout d'abord clair que α_{n+1} est bien un entier (relatif) en tant que somme de deux entiers relatifs. Par ailleurs :

$$\alpha_{n+1} = (n+1)\alpha_n + (-1)^{n+1} \geq (n+1) \times 1 - 1 = n \geq 2$$

Ainsi, l'entier α_{n+1} est supérieur ou égal à 1 et l'assertion $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vérifiée. Le principe de récurrence permet donc de conclure :

$$\boxed{\forall n \geq 2, \alpha_n \in \mathbb{N}^*}$$

3 On trouve successivement :

$$\boxed{\beta_0 = 1} \quad \boxed{\beta_1 = 0} \quad \boxed{\beta_2 = 1} \quad \boxed{\beta_3 = 2} \quad \boxed{\beta_4 = 9}$$

4 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire :

$$\beta_n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} (-1)^k = \sum_{k=0}^n n(n-1) \dots (k+1) (-1)^k$$

Ainsi, β_n est une somme d'entiers relatifs, donc, à ce titre :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \beta_n \in \mathbb{Z}}$$

5 Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\beta_{n+1} - (n+1)\beta_n = (n+1)! \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!} - (n+1)! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} = (n+1)! \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \beta_{n+1} - (n+1)\beta_n = (-1)^{n+1}}$$

6 On a d'une part $\alpha_0 = \beta_0 = 1$ et d'autre part, les suites $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifient la même relation de récurrence, à savoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} \alpha_{n+1} - (n+1)\alpha_n = (-1)^{n+1} \\ \beta_{n+1} - (n+1)\beta_n = (-1)^{n+1} \end{cases}$$

On en déduit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n = \beta_n}$$

7 Sur l'intervalle $] -1, 1[$, l'équation différentielle s'écrit encore : $f'(x) + \frac{x}{x-1}f(x) = 0$. Puisque la fonction $x \mapsto \frac{x}{x-1}$ est continue sur $] -1, 1[$, le problème étudié est un problème de Cauchy qui admet donc une unique solution. Une primitive sur $] -1, 1[$ de $x \mapsto \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$ est $x \mapsto x + \ln(x-1)$, donc, les fonctions solutions de l'équation différentielle sont toutes les fonctions de la forme $f(x) = \frac{Ae^{-x}}{x-1}$ avec $A \in \mathbb{R}$. La condition $f(0) = 1$ donne $A = -1$, d'où :

$$\boxed{\forall x \in] -1, 1[, f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}}$$

8 La fonction f est de classe C^∞ sur $] -1, 1[$ en tant que quotient de fonctions de classe C^∞ sur $] -1, 1[$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

9 D'après la question 9, on a $(1-x)f(x) = e^{-x}$ pour tout $x \in] -1, 1[$. Nous allons dériver $n+1$ fois cette expression. Dans le membre de droite, on obtient $(-1)^{n+1}e^{-x}$ et dans le membre de gauche, la formule de Leibniz permet de trouver :

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} [(1-x)]^{(k)} [f(x)]^{(n+1-k)}$$

On constate qu'il ne reste dans cette somme que les termes d'indices $k=0$ et $k=1$ car la dérivée seconde de $x \mapsto x-1$ est nulle. On trouve donc :

$$\forall x \in] -1, 1[, (1-x)f^{(n+1)}(x) - (n+1)f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}e^{-x}$$

10 En prenant $x=0$ dans cette dernière égalité, on trouve :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n+1)}(0) - (n+1)f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}$$

Ainsi, les suites $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(f^{(n)}(0))_{n \in \mathbb{N}}$ ont le même premier terme $\beta_0 = f(0) = 1$ et vérifient la même relation de récurrence. En conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \beta_n = f^{(n)}(0)$$

11 Une série exponentielle est une série de la forme $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ et elle est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$.

12 En particulier, pour $x=-1$, la série exponentielle est convergente, et ρ_n est donc correctement définie en tant que reste d'indice n d'une série convergente.

13 La série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est une série alternée, et elle vérifie le critère spécial des séries alternées car la suite $\left(\frac{1}{k!}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0. A ce titre, on peut dire que le reste d'indice n de cette série est du signe de $\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$, c'est-à-dire, du signe de $(-1)^{n+1}$. Finalement :

$$\rho_n \text{ est positif si } n \text{ est impair, et négatif si } n \text{ est pair.}$$

14 Utilisons à nouveau le cours sur les séries alternées, et plus précisément le résultat sur la majoration du reste. On obtient $|\rho_n| \leq \frac{1}{(n+1)!}$, ce qui s'écrit encore :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n! |\rho_n| \leq \frac{1}{n+1}$$

Nous allons démontrer que cette inégalité est stricte en raisonnant par l'absurde.

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $|\rho_n| = \frac{1}{(n+1)!}$.

• Si n est impair, $\rho_n \geq 0$, d'où :

$$|\rho_n| = \frac{1}{(n+1)!} \iff \rho_n = \frac{1}{(n+1)!} \iff \frac{1}{(n+1)!} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} \iff \rho_{n+1} = 0$$

• Si n est pair, $\rho_n \leq 0$, d'où :

$$|\rho_n| = \frac{1}{(n+1)!} \iff \rho_n = -\frac{1}{(n+1)!} \iff -\frac{1}{(n+1)!} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = -\frac{1}{(n+1)!} \iff \rho_{n+1} = 0$$

Dans tous les cas, on aurait donc $\rho_{n+1} = 0$, ce qui entraînerait que $\rho_{n+2} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)!}$, ce qui est impossible vu que

$|\rho_{n+2}| \leq \frac{1}{(n+3)!}$. Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n! |\rho_n| < \frac{1}{n+1}$$

15 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, on peut écrire :

$$|n! \rho_n| < \frac{1}{n+1} \iff \left| n! \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \right| < \frac{1}{n+1} \iff \left| n! \left(e^{-1} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right) \right| < \frac{1}{n+1} \iff \left| \frac{n!}{e} - \beta_n \right| < \frac{1}{n+1}$$

Or, $n \geq 1$, donc $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$, donc, en utilisant le résultat admis, on peut écrire :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \beta_n \text{ est l'entier naturel le plus proche de } \frac{n!}{e}$$

16.a Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il est clair que $0 \leq J_n$, et d'autre part, avec la majoration $e^x \leq e$ pour tout $x \in [0, 1]$, on peut déduire :

$$J_n \leq \int_0^1 e x^n dx = \frac{e}{n+1}$$

Par encadrement, on obtient donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$$

16.b La suite (J_n) est positive et décroissante. En effet :

$$\forall n \in \mathbb{N}, J_{n+1} - J_n = \int_0^1 x^{n+1} e^x dx - \int_0^1 x^n e^x dx = \int_0^1 x^n (x-1) e^x dx \leq 0$$

Or, cette suite tend vers 0 d'après la question précédente, donc, le critère spécial des séries alternées, on peut conclure que :

$$\text{La série } \sum v_n \text{ est convergente.}$$

17.a Puisque la fonction exponentielle est invariante par dérivation, on obtient :

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$$

17.b Prenons $x = -1$ dans l'égalité précédente. On obtient :

$$e^{-1} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} + \int_0^{-1} \frac{(-1-t)^n}{n!} e^t dt$$

Multiplions maintenant chaque membre par $n!$:

$$\frac{n!}{e} = \beta_n + \int_0^{-1} (-1-t)^n e^t dt$$

Effectuons enfin le changement de variable $u = 1 + t$ dans l'intégrale :

$$\frac{n!}{e} = \beta_n + \int_1^0 (-u)^n e^{u-1} du = \beta_n + \frac{(-1)^{n+1}}{e} \int_0^1 u^n e^u du$$

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \delta_n = \frac{v_n}{e}$$

18.a On déduit des questions **16.a** et **17.b** que :

$$\text{La série } \sum \delta_n \text{ est convergente.}$$

18.b Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|\delta_n| = \frac{|v_n|}{e} = \frac{J_n}{e}$. Or, une intégration par parties (en intégrant $x \mapsto e^x$ et en dérivant $x \mapsto x^n$) permet d'obtenir :

$$J_n = \int_0^1 x^n e^x dx = [x^n e^x]_0^1 - n \int_0^1 x^{n-1} e^x dx = e - n J_{n-1}$$

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n J_{n-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (e - J_n) = e$, de sorte que $J_{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e}{n}$. Ainsi, on a l'équivalent $|\delta_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ ce qui permet de conclure :

La série $\sum \delta_n$ est ne converge pas absolument.

19 D'après la question précédente, on peut écrire : $\frac{|\delta_n|}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ ce qui permet de déduire, par comparaison de séries à termes positifs, que :

La série $\sum \frac{|\delta_n|}{n}$ converge.

Un corrigé de l'exercice :

1 Considérons $(P, Q) \in E^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On trouve :

$$\begin{aligned} f(\alpha P + \beta Q) &= (X^2 - X)(\alpha P + \beta Q)' - aX(\alpha P + \beta Q) = (X^2 - X)(\alpha P' + \beta Q') - aX(\alpha P + \beta Q) \\ &= \alpha((X^2 - X)P' - aXP) + \beta((X^2 - X)Q' - aXQ) = \alpha f(P) + \beta f(Q) \end{aligned}$$

On peut donc conclure :

f est une application linéaire

2 Soit $P = \alpha X^3 + \beta X^2 + \gamma X + \delta \in E$. On trouve :

$$\begin{aligned} f(P) &= (X^2 - X)(3\alpha X^2 + 2\beta X + \gamma) - aX(\alpha X^3 + \beta X^2 + \gamma X + \delta) \\ &= \alpha(3 - a)X^4 + (2\beta - a\beta - 3\alpha)X^3 + (\gamma - a\gamma - 2\beta)X^2 + (-\gamma - a\delta)X \end{aligned}$$

Ainsi, on aura $f(P) \in E$ pour tout $P \in E$ si et seulement si $3 - a = 0$. On peut donc conclure :

f est un endomorphisme de E si et seulement si $a = 3$.

3 Soit $P = \alpha X^3 + \beta X^2 + \gamma X + \delta \in E$. On a les équivalences :

$$P \in \text{Ker}(f) \iff f(P) = 0 \iff (-\beta - 3\alpha)X^3 + (-2\gamma - 2\beta)X^2 + (-\gamma - 3\delta)X = 0 \iff (\alpha = -\delta, \beta = 3\delta, \gamma = -3\delta)$$

Ainsi :

Une base de $\text{Ker}(f)$ est $\mathcal{B}_1 = (X^3 - 3X^2 + 3X - 1)$

4 Tout d'abord, on peut dire d'après la question précédente que $\text{Ker}(f)$ est de dimension 1, donc, d'après le théorème du rang, f est de rang 3. Par ailleurs :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3)) = \text{Vect}(-3X, -2X^2 - X, -X^3 - 2X^2, -3X^3) \subset \text{Vect}(X, X^2, X^3)$$

Grâce aux dimensions, cette inclusion devient une égalité. On dispose donc d'une famille génératrice de $\text{Im}(f)$ et comme cette famille est constituée de polynômes de degrés échelonnés, elle est libre. On peut donc conclure :

Une base de $\text{Im}(f)$ est $\mathcal{B}_2 = (X, X^2, X^3)$

5 Il est facile de constater que $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$ et on a par ailleurs $\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = 4 = \dim(\mathbb{R}_3[X])$, donc :

$$E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$$

FIN !