

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Dans tout ce problème, on s'intéresse à plusieurs suites, à certaines de leurs propriétés et à leur convergence.

PARTIE I - Etude d'une première suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$

On considère la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\alpha_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_{n+1} = (n+1)\alpha_n + (-1)^{n+1}$.

1. Expliciter α_k pour tout $k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket$.
2. Démontrer que : $\forall n \geq 2, \alpha_n \in \mathbb{N}^*$.

PARTIE II - Etude d'une deuxième suite $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N} : \beta_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$.

3. Expliciter β_k pour tout $k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket$.
4. Démontrer que β_n est un entier relatif pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Expliciter $\beta_{n+1} - (n+1)\beta_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. Comparer les valeurs des deux suites $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

PARTIE III - Une autre expression de $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$

On cherche les fonctions de classe C^1 sur $] -1, 1[$ et à valeurs réelles, solutions du problème :

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ \forall x \in] -1, 1[, (1-x)f'(x) - xf(x) = 0 \end{cases}$$

7. Justifier l'existence et l'unicité de la fonction f , puis expliciter $f(x)$ pour tout $x \in] -1, 1[$.
8. Justifier que la fonction f est de classe C^∞ sur $] -1, 1[$.
9. Expliciter $(1-x)f(x)$ pour tout $x \in] -1, 1[$ puis donner une expression simple, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in] -1, 1[$ de :
$$(1-x)f^{(n+1)}(x) - (n+1)f^{(n)}(x)$$
10. En déduire une relation, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, entre β_n et $f^{(n)}(0)$.

PARTIE IV - Une troisième suite $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$

11. Rappeler la définition d'une série exponentielle et les valeurs pour lesquelles une telle série est définie.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N} : \rho_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$.

12. Justifier que la quantité ρ_n existe pour tout $n \in \mathbb{N}$.
13. Préciser le signe de ρ_n en fonction de n .

14. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité $n! |\rho_n| \leq \frac{1}{n+1}$. L'inégalité est-elle stricte ?

Nous admettrons dans la suite le résultat suivant, que l'on pourra utiliser librement : Si x est un nombre réel et s'il existe un nombre entier p qui vérifie $|p - x| < \frac{1}{2}$, alors, p est l'entier le plus proche de x .

15. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, β_n est l'entier naturel le plus proche de $\frac{n!}{e}$.

PARTIE V - Etude de séries

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\delta_n = \frac{n!}{e} - \beta_n$$

$$J_n = \int_0^1 x^n e^x dx$$

$$v_n = (-1)^{n+1} J_n$$

16. Etude de la série $\sum_{n \geq 0} v_n$:

- (a) Déterminer la limite de la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
- (b) Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 0} v_n$.

17. Une estimation intégrale de δ_n

- (a) Appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction exponentielle à l'ordre n entre 0 et $x \in \mathbb{R}$.
- (b) En déduire une relation entre δ_n et v_n .

18. Etude de la série $\sum_{n \geq 0} \delta_n$:

- (a) Etudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \delta_n$.
- (b) Etudier la convergence absolue de la série $\sum_{n \geq 0} \delta_n$.

19. Etudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{|\delta_n|}{n}$.

EXERCICE :

On pose $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $P \in E$, on pose $f(P) = (X^2 - X)P' - aXP$.

- 1.** Démontrer que f est une application linéaire.
- 2.** Démontrer qu'il existe une unique valeur de a pour laquelle f est un endomorphisme de E .

Dans toute la suite, on suppose que a vaut cette valeur.

- 3.** Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$.
- 4.** Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.
- 5.** Les espaces $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont-ils supplémentaires dans E ?